

Polynômes

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 L'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K}

1.1 Définition d'un polynôme et de son degré

Définition 1. Un **polynôme** P à une indéterminée X est défini par une suite finie de coefficients $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, où $n \in \mathbb{N}$, et peut s'écrire :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 X^0$$

L'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 1. Soit $P = X^2 + X + X^0$. Définir :

a) $P(2)$ b) $P(u)$, où $u : x \mapsto \cos(x)$ c) $P(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Définition 2. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

1. On dit que P est le polynôme nul (et on note $P = 0$) si tous ses coefficients sont nuls.
2. On dit que P et Q sont égaux (et on note $P = Q$) si P et Q ont les mêmes coefficients.

Définition 3. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ non nul.

1. Si n est le plus grand entier tel que $a_n \neq 0$ alors n est appelé **degré** de P et noté $\deg(P)$,
 a_n est appelé **coefficient dominant** de P et $a_n X^n$ le **terme de plus haut degré** de P .
2. P est dit unitaire si son coefficient dominant est 1.
3. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.
4. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 2. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(1) = P(-2) = 0$ et $P(0) = 1$.

1.2 Somme, produit et composée de polynômes

Définition 4. Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$. On définit :

1. la **somme** de P et Q par $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$
2. le **produit** de P par $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda P = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k) X^k$
3. le **produit** de P et Q par $P \times Q = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) X^k$
4. le polynôme **composé** de P et Q par $P \circ Q = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$.

Exemple 3. Soient $P = X^2$ et $Q = 5X^3 - X + 3$.

Calculer $Q \circ P$ et $P \circ Q$ et donner le degré et le coefficient dominant de chacun d'eux.

Remarque : $P \circ X = P(X) = P$.

Propriété 1. La somme et le produit de polynômes vérifient :

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ et $P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R$ **Associativité**
2. $P + Q = Q + P$ et $P \times Q = Q \times P$ **Commutativité**
3. $P + 0 = 0 + P = P$ et $P \times 1 = 1 \times P = P$ **Élément neutre**
4. $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$ et $(P + Q) \times R = P \times R + Q \times R$ **Distributivité**

Remarque : On pose $P - Q = P + (-1)Q$, $P^0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{k+1} = P P^k$.

Propriété 2. Si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ alors

1. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
2. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg(P^k) = k \times \deg(P)$.

Exemple 4. Soient $P = 3X^2 + (1 - i)X$ et $Q = 2X^3 - 5X + i$.

Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P + Q$, $(1 + i)P$, PQ et P^3 .

Propriété 3. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a : $PQ = 0 \iff (P = 0 \text{ ou } Q = 0)$ **Intégrité**

2 Racines d'un polynôme et relation de divisibilité

2.1 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 5. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

On dit que B **divise** A (et on note $B|A$) s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

Dans ce cas, on dit que B est un **diviseur** de A ou que A est un **multiple** de B .

Exemple 5. Montrer que $X - 1$ divise $X^3 - 2X^2 + 3X - 2$.

Remarque : Tout polynôme A divise 0. Tout polynôme A est divisible par $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et λA .

Théorème 1. (et définition) Si $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, avec $B \neq 0$.

alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

Q et R sont respectivement appelés **quotient** et **reste de la division euclidienne** de A par B .

Exemple 6. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^2 + 1$ et $B = X + 1$ b) $A = 7X^8 + 4X^3 - X + 1$ et $B = X^2 + 2$.

Corollaire 1. Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, avec $B \neq 0$.

B divise A ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

2.2 Racines et multiplicités

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on note $P : z \mapsto P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ la **fonction polynomiale** associée à P .

Définition 6. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une **racine** du polynôme P si $P(\alpha) = 0$.

Théorème 2. $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P ssi $X - \alpha$ divise P .

Exemple 7. Déterminer les racines de $P = X^3 - X - 6$ dans \mathbb{C} , puis dans \mathbb{R} .

Définition 7. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. P est dit **scindé** s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1.

Exemple 8. Le polynôme $P = X^4 - 1$ est-il scindé dans $\mathbb{C}[X]$? dans $\mathbb{R}[X]$?

Définition 8. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P de **multiplicité** $m \in \mathbb{N}^*$ si

$(X - \alpha)^m$ divise P et $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P .

Une racine simple (resp. double) de P est une racine de P de multiplicité 1 (resp. 2).

Exemple 9. Racines et multiplicités dans \mathbb{R} de $P = (X^2 - 1)^2$ et $Q = X^4 - 1$.

Remarque : $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ ssi $P = (X - \alpha)^m Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Propriété 4. Si $\deg(P) = n$ alors P possède au plus n racines, comptées avec multiplicités.

Conséquence : Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet plus de n racines distinctes alors $P = 0$.

Deux fonctions polynomiales sont égales ssi elles ont même degré et mêmes coefficients.

2.3 Dérivation d'un polynôme

Définition 9. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On appelle **polynôme dérivé** de P le polynôme $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$.

Exemple 10. Dériver $P = X^3 + (1 + 2i)X^2 + 3$ et $Q = 3X^2 - X + 2$.

Remarque : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la fonction $P : x \mapsto P(x)$ a pour dérivée $P' : x \mapsto P'(x)$.

Propriété 5. Si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ alors 1. $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$

2. $(PQ)' = P'Q + PQ'$ 3. $\deg(P') = -\infty$ si P est constant et $\deg(P') = \deg(P) - 1$ sinon.

Définition 10. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Les **dérivées successives** de P sont définies par : $P^{(0)} = P$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$.

Exemple 11. Dérivées k -ièmes de $P = X^3 + (1 + 2i)X^2$ et $Q = (X - a)^n$, $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3. Formule de Taylor Si $n \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors

$$\forall a \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

Exemple 12. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X - a)^2$.

Théorème 4. $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ ssi pour tout $k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket$,

$$P^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Exemple 13. Déterminer la multiplicité de la racine 1 de $P = X^4 - X^3 - 7X^2 + 13X - 6$.

3 Décomposition en produit de facteurs irréductibles

3.1 Polynômes irréductibles

Définition 11. $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** si P est non constant et ses seuls diviseurs sont les polynômes constants non nuls et les λP , où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Théorème 5. de d'Alembert-Gauss - admis

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.

Propriété 6. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Lemme 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.

Si α est une racine complexe non réelle de P de multiplicité m , alors $\bar{\alpha}$ aussi.

Propriété 7. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

3.2 Décomposition en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$

Théorème 6. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant s'écrit $P = \lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}$,

où λ est le coefficient dominant de P , et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les racines complexes distinctes de P , de multiplicités respectives m_1, \dots, m_p .

De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Remarque : Dans cette décomposition, $m_1 + \dots + m_p = \deg(P)$.

Exemple 14. Décomposer P en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\text{a) } P = 4X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 2 \quad \text{b) } P = X^4 + 1 \quad \text{c) } P = X^n - 1, n \in \mathbb{N}^*.$$

Théorème 7. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant s'écrit $P = \lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{l=1}^q (X^2 + \beta_l X + \gamma_l)^{r_l}$,

où λ est le coefficient dominant de P , $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les racines réelles distinctes de P de multiplicités respectives m_1, \dots, m_p , et $\beta_1, \dots, \beta_q, \gamma_1, \dots, \gamma_q \in \mathbb{R}$, $r_1, \dots, r_q \in \mathbb{N}^*$.

De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Remarque : Dans cette décomposition, les polynômes $X^2 + \beta_l X + \gamma_l$ de degré 2 ont des discriminants strictement négatifs, et $m_1 + \dots + m_p + 2r_1 + \dots + 2r_q = \deg(P)$.

Exemple 15. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\text{a) } P = X^4 - X^3 - 7X^2 + 13X - 6 \quad \text{b) } P = 4X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 2 \quad \text{c) } P = X^4 + 1.$$

3.3 Somme et produit des racines

Propriété 8. Si $P = a_n(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$ est scindé de degré $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Remarque : Les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines de P comptées avec multiplicités.

Exemple 16. Somme et produit des racines de $P = 5X^7 - 2X^6 + X^4 - 3X^2 + X - 13$.