Devoir maison n° 12

A rendre le jeudi 25 janvier 2024

Étant donné un nombre réel $a > 0$, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \mathrm{e}^{a(x-1)}$.

On définit alors la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f_a(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Le but est, après avoir montré la convergence de (u_n), d'étudier la valeur de sa limite en fonction de celle de a.

Les différentes questions et parties ne sont pas indépendantes.

I. Convergence de la suite (u_n)

1. Montrer, à l'aide d'une récurrence, que (u_n) est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge puis montrer que sa limite est une solution de l'équation $ax - \ln(x) - a = 0$ **(E)**.

   Donner une solution évidente de l'équation **(E)**.

Dans toute la suite, on notera $L(a)$ la limite de la suite (u_n).

II. Nombre de solutions de (E)

On définit la fonction g_a par $g_a(x) = ax - \ln(x) - a$.

1. Déterminer le domaine de définition D de g_a, et montrer que g_a est continue sur D.
2. Dresser le tableau de variation de g_a en justifiant soigneusement chaque résultat.
3. **Cas** $a = 1$. On suppose dans cette question que $a = 1$.

   Montrer que l'équation **(E)** admet une seule solution et déterminer la valeur de $L(1)$.
4. **Cas** $a \neq 1$. On suppose dans cette question que $a \neq 1$.

   (a) À l'aide du tableau de variation de la fonction g_1, montrer que $1 + \ln(a) - a < 0$.

   (b) En déduire que l'équation **(E)** admet exactement deux solutions, l'une appartenant à l'intervalle $\left]0, \frac{1}{a}\right[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$.

Dans ce qui suit, on notera $r(a)$ la plus petite racine de l'équation (E).

III. Évaluation de $L(a)$ si $0 < a < 1$. On suppose dans cette partie que $0 < a < 1$.

1. Montrer que $r(a) = 1$.
2. En déduire que $L(a) = 1$.

IV. Évaluation de $L(a)$ si $a > 1$. On suppose dans cette partie que $a > 1$.

1. (a) Montrer que $r(a) \in]0, 1[$ et vérifier que $f_a(r(a)) = r(a)$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq r(a)$. On pourra raisonner par récurrence.
   (c) En déduire que $L(a) = r(a)$.

2. (a) Démontrer que $\forall (x, x') \in \left[0, \dfrac{1}{a}\right]^2,\ \left|f_a(x) - f_a(x')\right| \leq \dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}} \left|x - x'\right|$. (On utilisera l'IAF)
   (b) En déduire, à l'aide d'une récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - L(a)| \leq \left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n$.
   (c) Démontrer que $\left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Indication : on pourra utiliser que sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, avec égalité uniquement pour $x = 0$.
   (d) Écrire alors une fonction Python d'arguments $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ retournant une valeur approchée de $L(a)$ à 10^{-k} près.