Correction du devoir maison n° 11

Exercice 1

1. (a) $\boxed{\mathbb{U}_n \text{ contient exactement } n \text{ éléments, qui sont : } 1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}}$.

   (b) $\omega - 1 = e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1 = e^{i\frac{\pi}{n}}\left(e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}\right) \underset{\text{Euler}}{=} 2i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}$.

   Comme $n \geq 3$, $\frac{\pi}{n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0$. D'où :

   $$\boxed{|\omega - 1| = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \text{ et } \arg(\omega - 1) = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]}.$$

   (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. On a : $(\omega^p)^n = \omega^{pn} = (\omega^n)^p = 1$ car $\omega^n = 1$.

   $\omega^p = e^{i\frac{2p\pi}{n}}$ donc, on a : $\omega^p = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{2p\pi}{n} = 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ p = kn$.

   Autrement dit, $\boxed{\omega^p = 1 \text{ si, et seulement si, } p \text{ est un multiple de } n}$.

2. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $\omega^p = 1$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$. Sinon, on a :

   $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \frac{1 - (\omega^p)^n}{1 - \omega^p} = 0$, car $(\omega^p)^n = 1$.

   Finalement, $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = n \text{ si } \omega^p = 1, \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = 0 \text{ si } \omega^p \neq 1}$.

   (b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. D'après la formule du binôme, $\boxed{(1+\omega^k)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \omega^{kp}}$.

   (c) On en déduit que $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \omega^{kp} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$,

   par interversion de l'ordre de sommation et par linéarité.

   D'après la question 1 (c), $\omega^p = 1$ si, et seulement si, p est un multiple de n.
   D'après la question 2 (a), on a :

   $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \binom{n}{0} \times n + \binom{n}{n} \times n$. D'où $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n = 2n}$.

3. (a) $\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1} \omega^k \underset{\omega \neq 1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^j \frac{1-\omega^{n-j}}{1-\omega} \underset{\omega^n = 1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega^j - 1}{1-\omega} \underset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{1-\omega}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^j - \frac{1}{1-\omega}\sum_{j=0}^{n-1} 1$.

   $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^j = 0$ (somme des racines n-*ièmes* de l'unité), donc $\boxed{\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1} \omega^k = \frac{n}{\omega - 1}}$.

4. Par interversion de l'odre de sommation, on a : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$.

D'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \frac{n}{\omega-1} = \frac{n}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}}$, d'après la question 1 (b).

Exercice 2 1.a. L'équation s'écrit, :

$$\begin{aligned} z^2 - 2e^{i\alpha}z - 2\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha = 0 &\iff \left(z-e^{i\alpha}\right)^2 = e^{i2\alpha} + 2\sin^2\alpha - i\sin 2\alpha \\ &\iff \left(z-e^{i\alpha}\right)^2 = \cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1 \end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{a = e^{i\alpha} \text{ et } b = 1}$.

1.b. On en déduit que les solutions de l'équation sont celles des équations :

$$z - e^{i\alpha} = 1 \quad \text{ou} \quad z - e^{i\alpha} = -1$$

Ceci donnent les solutions : $\boxed{z_1 = 1 + e^{i\alpha} \text{ et } z_2 = -1 + e^{i\alpha}}$

1.c. L'affixe du milieu est la demi-somme des racines

$$\frac{z_1+z_2}{2} = e^{i\alpha}$$

$\boxed{\text{L'ensemble recherché est donc l'ensemble } \mathbb{U} \text{ des nombres complexes de module 1}}$.

2.

$$z_1 = e^{i\alpha} + 1 = 2e^{\frac{i\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{i\alpha} - 1 = 2ie^{\frac{i\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}$$

On en déduit $\boxed{|z_1| = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = 2\cos\frac{\alpha}{2}}$ car $\frac{\alpha}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\boxed{\arg z_1 = \frac{\alpha}{2}}$.

Pour z_2 cela dépend aussi de l'intervalle où se trouve α :

$$\boxed{|z_2| = \begin{cases} 2\sin\frac{\alpha}{2} & \text{si} \quad \alpha \in [0,\pi[\\ -2\sin\frac{\alpha}{2} & \text{si} \quad \alpha \in [-\pi,0] \end{cases}} \quad \text{et} \quad \boxed{\arg(z_2) = \begin{cases} \frac{\alpha+\pi}{2} & \text{si} \quad \alpha \in]0,\pi[\\ \frac{\alpha+3\pi}{2} & \text{si} \quad \alpha \in [-\pi,0[\end{cases}}$$

3.

3.a

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{z_1^2}{z_2^2} \Rightarrow \widehat{S_1OS_2} = 2(\arg z_1 - \arg z_2) = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad \alpha \in]0,\pi[\\ 3\pi & \text{si} \quad \alpha \in [-\pi,0[\end{cases}$$

Ceci montre que les points sont alignés ; de manière plus précise,

$\boxed{O \text{ appartient au segment } S_1S_2}$.

3.b

La longueur du segment S_1S_2 est :

$$|z_1^2 - z_2^2| = |(e^{i\alpha} + 1)^2 - (e^{i\alpha} - 1)^2| = |2 \cdot 2e^{i\alpha}| = 4$$

$\boxed{\text{La longueur est constante et vaut } 4}$.

3.c

L'affixe z du milieu du segment S_1S_2 est donnée par la formule :

$$z = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} = \frac{(e^{i\alpha} + 1)^2 + (e^{i\alpha} - 1)^2}{2} = 1 + e^{2i\alpha}$$

Si I désigne le point d'affixe 1, $\boxed{\text{l'ensemble cherché est le cercle de centre } I \text{ et de rayon } 1}$.