Devoir maison n$^{\text{o}}$ 11

A rendre le jeudi 18 janvier 2024

Exercice 1 Soit un entier naturel $n \geq 3$ fixé. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines *n-ièmes* de l'unité et on pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.

1. (a) Donner, sans justifier, le nombre d'éléments de $\mathbb{U}_n$, et l'expression de ces éléments en fonction de ω.

   (b) Déterminer le module et un argument de $\omega - 1$.

   (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\omega^p \in \mathbb{U}_n$, puis déterminer les valeurs de p telles que $\omega^p = 1$.

2. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$, en distinguant le cas où $\omega^p = 1$ du cas où $\omega^p \neq 1$.

   (b) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé, développer $(1+\omega^k)^n$.

   (c) Déduire des deux questions précédentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n = 2n$.

3. (a) Calculer la somme triangulaire $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1} \omega^k$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \frac{n}{\omega - 1}$. Écrire le résultat précédent sous forme trigonométrique.

Exercice 2 Soit α un nombre de l'intervalle $[-\pi, \pi[$. On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2i\sin\alpha e^{i\alpha} = 0$$

1. (a) Écrire cette équation sous la forme $(z-u)^2 = v$ où u et v sont des nombres complexes dépendant de α que l'on donnera sous la forme trigonométrique.

   (b) Résoudre l'équation (E).

   (c) On note z_1 et z_2 les racines de cette équation, M_1 et M_2 leurs images dans le plan. Quel est l'ensemble décrit par le milieu du segment M_1M_2 quand α décrit $[-\pi, \pi[$?

2. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 quand α est différent de $-\pi$ et de 0.

3. On pose $s_1 = {z_1}^2$ et $s_2 = {z_2}^2$. On appelle S_1 et S_2 les points d'affixes respectives s_1 et s_2.

   (a) O désignant l'origine du plan complexe, montrer que les points S_1, S_2 et O sont alignés.

   (b) Montrer que la longueur du segment S_1S_2 est constante.

   (c) Quel est l'ensemble décrit par le milieu du segment S_1S_2 quand α décrit $[-\pi, +\pi[$?