Correction du Test n$^{\text{o}}$ 13 **Sujet A**

1.

2. Étudier la limite de $\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$ en $+\infty$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x-1 \leqslant x+\cos x \leqslant x+1$ et $x-1 \leqslant x+\sin x \leqslant x+1$ donc,

   pour tout $x>1$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{x+\sin x} \leqslant \dfrac{1}{x-1}$ et $\dfrac{x-1}{x+1} \leqslant \dfrac{x+\cos x}{x+\sin x} \leqslant \dfrac{x+1}{x-1}$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ (fraction rationnelle) d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\cos x}{x+\sin x} = 1$ d'après le théorème des gendarmes.

3. On considère la fonction f définie sur$\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{2x+|x|}$

   (a) Si $x<0$ alors $f(x) = \dfrac{x}{2x-x} = 1$ Si $x>0$ alors $f(x) = \dfrac{x}{2x+x} = \dfrac{1}{3}$

   Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{3}$

   (b) On ne peut pas prolonger f par continuité en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

4. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2\, e^{-\frac{1}{x}}$

   $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ par composition et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

   f est donc prolongeable par continuité en 0 à droite en posant

   $$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Correction du Test n$^{\text{o}}$ 13 **Sujet B**

1.

2. Étudier la limite de $\dfrac{4\sin^2 x + 3\cos(5x)}{x}$ en $+\infty$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant 4\sin^2 x \leqslant 4$ et $-3 \leqslant 3\cos(5x) \leqslant 3$ donc

   $-3 \leqslant 4\sin^2 x + 3\cos(5x) \leqslant 7$ et pour tout $x>0$, $\dfrac{-3}{x} \leqslant \dfrac{4\sin^2 x + 3\cos(5x)}{x} \leqslant \dfrac{7}{x}$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4\sin^2 x + 3\cos(5x)}{x} = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

3. On considère la fonction f définie sur$\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2x+|x|}{x}$

(a) Si $x < 0$ alors $f(x) = \dfrac{2x - x}{x} = 1$ Si $x > 0$ alors $f(x) = \dfrac{2x + x}{x} = 3$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$

(b) On ne peut pas prolonger f par continuité en 0 car $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

4. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ par composition et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

f est donc prolongeable par continuité en 0 à droite en posant

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in \mathbb{R}_+^* \\ \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$