TD12 — Corrections

Exercice 1

e) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{x} + x}{e^{x} - x}$

En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{e^{\cancel{2}x}\left(1 - e^{-x} + \frac{x}{e^{2x}}\right)}{\cancel{e^{x}}\left(1 - \frac{x}{e^{x}}\right)}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{2x}} = 0$ par croissances comparées

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ par produit et quotient

En $-\infty$: $f(x) = \dfrac{\cancel{x}\left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^{x}}{x} + 1\right)}{\cancel{x}\left(\frac{e^{x}}{x} - 1\right)}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1}$ par quotient

f) $f(x) = \ln(1 + e^{x}) - x + 1$ en $+\infty$

$= \ln(1 + e^{x}) - \ln(e^{x}) + 1$

$= \ln\left(\dfrac{1 + e^{x}}{e^{x}}\right) + 1$

$= \ln(e^{-x} + 1) + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$ par composition

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$

Exercice 4

1. $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$\frac{x+1}{x}$ est du signe de $x(x+1)$, polynôme de degré 2 qui s'annule en -1 et en 0. Donc f est définie et continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, +\infty[$

$\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1 \right.$ (fraction rationnelle) donc FI en $\pm\infty$ $\left.\right)$

$f(x) = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}}$ Or $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1 + X)}{X} = 1$

donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ par composition

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

En -1 : $\lim\limits_{x \to -1^-} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\infty$ par composition

d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty}$

En 0 : $f(x) = x^2 \ln(1+x) - x^2 \ln x$

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln(1+x) = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0}$

2. $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x$

donc f est définie sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur chaque intervalle $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, donc f est continue sur chacun de ces intervalles.

$\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n - 1 + 1 = n$ car $\lfloor x \rfloor = n - 1$ pour $x < n$

et $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n$ car $\lfloor x \rfloor = n$ pour $x \geq n$ (et $x < n+1$)

De plus $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ donc $\lfloor x \rfloor \leq f(x) < \lfloor x \rfloor + 1$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

3. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1,1[\\ 0 & \text{si } x \notin]-1,1[\end{cases}$

f est définie et continue sur $]-\infty,-1[$, sur $]-1,1[$ et sur $]1,+\infty[$ comme composée de fonctions définies et continues, avec $1-x^2 \neq 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to \pm 1 \\ -1<x<1}} \dfrac{1}{1-x^2} = +\infty$ car $1-x^2 > 0$ $\forall x \in]-1,1[$

donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$ par composition

et f est continue en -1.

De même $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$ et f est continue en 1

f est alors continue sur $\mathbb{R}$.

R.q $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et si $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ donc f est paire. On peut étudier f sur $[0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1-x^2} = 0$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ car f est paire.