

Correction du Test n° 14

Sujet A

1.

2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

f est définie, continue, dérivable de dérivée continue sur chaque intervalle de \mathbb{R}^* par composée de fonctions qui le sont, avec $x \neq 0$.

f est continue en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ par composition.

Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = X^2 e^X$ avec $X = -\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ par croissances comparées et f est dérivable à droite en 0 d'après le théorème de la dérivée, avec $f'_d(0) = 0$

Pour $x < 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = X^2 e^X$ avec $X = \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^-$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$ par croissances comparées et f est dérivable à gauche en 0 d'après le théorème de la dérivée, avec $f'_g(0) = 0$.

Finalement, f est dérivable en 0 et donc sur \mathbb{R} .

3. On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = (x+1) \ln(1+x)$ si $x \neq -1$ et $f(-1) = 0$.

f est définie et continue sur $] -1, +\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont, avec $1+x > 0$

$f(x) = (x+1) \ln(1+x) = X \ln X$ avec $X = x+1 \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow -1$

donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$ par croissances comparées et f est continue en -1 .

$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \ln(1+x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow -1^+$ donc f n'est pas dérivable en -1

Correction du Test n° 14

Sujet B

- 1.
2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

f est définie, continue, dérivable de dérivée continue sur chaque intervalle de \mathbb{R}^* par composée de fonctions qui le sont, avec $x \neq 0$.

f est continue en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ par composition.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = X^2 e^X \text{ avec } X = -\frac{1}{x} \rightarrow -\infty \text{ lorsque } x \rightarrow 0^+$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ par croissances comparées et f est dérivable en 0 d'après le théorème de la dérivée. Or $f'(0) = 0$ donc f' est continue en 0 et finalement f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

3. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = x^2 \ln(x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

f est définie, continue, dérivable de dérivée continue sur chaque intervalle de \mathbb{R}_+^* par composée de fonctions qui le sont, avec $x > 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ par croissances comparées, donc f est continue en 0

$$f'(x) = 2x \ln x + x$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ par somme et croissances comparées, donc f' est dérivable en continue

en 0 et f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

$\frac{f'(x)}{x} = 2 \ln x + 1 \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0$ donc f' n'est pas dérivable en 0.