Correction du devoir maison n° 12

I. Convergence de la suite (u_n)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathscr{Q}_n$: "$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$".

   — $u_0 = 0$ et $u_1 = f_a(0) = \mathrm{e}-a \in]0, 1[$ car $a > 0$. Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ et $\mathscr{Q}_0$ est vraie.

   — Supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR). La fonction f_a est croissante sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions croissantes, car $a > 0$. Donc on a :

   $f_a(0) \leq f_a(u_n) \leq f_a(u_{n+1}) \leq f_a(1)$ donc $0 \leq \mathrm{e}^{-a} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

   Par récurrence, $\mathscr{Q}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et
   $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à valeurs dans } [0, 1]}$.

2. On en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } L(a) \in [0, 1]}$, par le théorème de la limite monotone et par passage à la limite.

   f_a est continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions qui le sont, et
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_a(u_n)$.

   Donc $L(a) = f_a(L(a)) = \mathrm{e}a(L(a) - 1) > 0$ et par application de la fonction ln on obtient :

   $\ln(L(a)) = \ln(f_a(L(a))) = a(L(a) - 1)$ et donc $aL(a) - \ln(L(a)) - a = 0$.

   $\boxed{L(a) \text{ est une solution de } (\boldsymbol{E}) \text{ et le nombre 1 est une solution évidente de } (\boldsymbol{E})}$.

II. Nombre de solutions de (E)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $g_a(x) = ax - \ln(x) - a$ existe ssi $x > 0$. Donc $\boxed{D = \mathbb{R}_+^*}$. De plus,

   $\boxed{g_a \text{ est continue (et même dérivable) sur } D}$, comme somme de fonctions qui le sont.

2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_a'(x) = a - \frac{1}{x}$ et $g_a'(x) > 0 \iff a > \frac{1}{x} \iff \frac{1}{a} < x$, car $a, x > 0$.

   $g_a(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, par opérations sur les limites.

   En $+\infty$, $g_a(x) = x\left(a - \frac{\ln x}{x}\right) - a \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par croissance comparée et opérations sur les limites, car $a > 0$.

   $g_a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a - a$. D'où le tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
$g_a'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g_a(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$1 + \ln a - a$	$\nearrow$	$+\infty$

3. **Cas** $a = 1$. En remplaçant a par 1, on obtient le tableau de variation de g_1 :

x	0		1		$+\infty$
$g_1'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g_1(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau de variation, l'équation $g_1(x) = 0$ a pour unique solution 1.

Si $a = 1$, $\boldsymbol{(E)} \iff g_1(x) = 0$ et $L(1)$ est solution de $\boldsymbol{(E)}$.

Donc $\boxed{\boldsymbol{(E)} \text{ a pour unique solution } 1 \text{ et } L(1) = 1}$.

4. **Cas** $a \neq 1$. On suppose dans cette question que $a \neq 1$.

   (a) D'après le tableau de variation de g_1, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\},\ \ x - \ln(x) - 1 > 0$.

   Donc, si $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, alors $a - \ln(a) - 1 > 0$ et $\boxed{1 + \ln a - a < 0}$.

   (b) g_a est continue, strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{a}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$. D'après le théorème de la bijection, g_a réalise une bijection de $\left]0, \frac{1}{a}\right[$ sur l'intervalle $g_a\left(\left]0, \frac{1}{a}\right[\right) =]1 + \ln a - a, +\infty[$ et g_a réalise une bijection de $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$ sur l'intervalle $g_a\left(\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[\right) =]1 + \ln a - a, +\infty[$ qui contient 0, d'après la question précédente.

   Dans ce cas, l'équation $g_a(x) = 0$, et donc $\boxed{\boldsymbol{(E)}, \text{ admet exactement deux solutions}}$: l'une, notée $r(a)$, appartenant à $\left]0, \frac{1}{a}\right[$ et l'autre appartenant à $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$.

III. Évaluation de $L(a)$ si $\boldsymbol{0 < a < 1}$. On suppose dans cette partie que $0 < a < 1$.

1. On sait que $\boldsymbol{(E)}$ admet exactement une solution dans $\left]0, \frac{1}{a}\right[$, notée $r(a)$.
   Si $0 < a < 1$ alors $1 \in \left]0, \frac{1}{a}\right[$ et 1 est une solution de $\boldsymbol{(E)}$. Donc, dans ce cas, $\boxed{r(a) = 1}$.

2. Un passage à la limite dans l'inégalité $u_n \leq 1$ donne $L(a) \leq 1$. Or $1 = r(a)$ est la plus petite solution de $\boldsymbol{(E)}$ et $L(a)$ est une solution de $\boldsymbol{(E)}$. Donc
   $\boxed{\text{si } 0 < a < 1 \text{ alors } L(a) = 1}$.

IV. Évaluation de $L(a)$ si $\boldsymbol{a > 1}$. On suppose dans cette partie que $a > 1$.

1. (a) On sait que $r(a) \in \left]0, \frac{1}{a}\right[$. Or $a > 1$ entraîne $\frac{1}{a} < 1$ donc $\boxed{r(a) \in]0, 1[}$.

   $r(a)$ est une solution de $\boldsymbol{(E)}$ donc $ar(a) - a = \ln(r(a))$.

   En appliquant l'exponentielle, on a : $\boxed{f_a(r(a)) = \mathrm{e}^{ar(a) - a} = r(a)}$.

(b) On procède par récurrence.

— $r(a) > 0$ et $u_0 = 0$ donc $u_0 \leq r(a)$. La propriété est vraie au rang 0.

— Supposons que $u_n \leq r(a)$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR).

En appliquant la fonction croissante f_a, on obtient :

$u_{n+1} = f_a(u_n) \leq f_a(r(a)) = r(a)$, d'après la question précédente.

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq r(a)}$.

(c) Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $L(a) \leq r(a)$.

$L(a)$ est une solution de $\boldsymbol{(E)}$ et $r(a)$ est la plus petite solution de $\boldsymbol{(E)}$ donc $\boxed{L(a) = r(a)}$.

2. (a) f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$, par les théorèmes généraux, et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f_a'(x) = a\mathrm{e}^{a(x-1)} = af_a(x) > 0$.
f_a est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{a}\right]$, $\left|f_a'(x)\right| = af_a(x) \leq af_a\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}$.

Par l'I.A.F. on a bien $\boxed{\forall (x, x') \in \left[0, \dfrac{1}{a}\right]^2,\ \left|f_a(x) - f_a(x')\right| \leq \dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\left|x - x'\right|}$.

(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - L(a)| \leq \left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n$.

— $u_0 = 0$ et $L(a) = r(a) \in]0, 1[$ donc $|u_0 - L(a)| \leq 1 = \left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^0$.

La propriété est vraie au rang 0.

— Supposons qu'elle soit vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR). D'après **I.** 1. et **IV.** 1.(b) et (c), $0 \leq u_n \leq L(a) \leq \frac{1}{a}$. Donc, d'après **IV.** 1.(a) et 2.(a), on a :

$|u_{n+1} - L(a)| = |f_a(u_n) - f_a(L(a))| \leq \dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}|u_n - L(a)| \underset{\text{(HR)}}{\leq} \left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^{n+1}$,

car $\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}} > 0$. La propriété est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - L(a)| \leq \left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n}$.

(c) $\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}} = e^{\ln a - a + 1}$ Or $\ln a - a + 1 < 0$ pour tout $a > 0$ d'après 4.(a), d'où $0 < \dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}} < 1$. Donc $\boxed{\left(\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$.

(d)
```
def limite(a,k):
...  a=abs(a)
...  k=int(k)
...  if a<=1:
... ...  u=1
...  else:
... ...  u=0
... ...  n=0
... ...  while (a/exp(a-1))**n>(1/10**k):
... ... ...  u=exp(a*(u-1))
... ... ...  n=n+1
...  return u
```