Correction du concours blanc n° 1
Partie 2

Exercice 1 (4 points) : 1) 0.5 2) 1 + 1 3) 1.5

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. $\boxed{\cos^2(k\theta) = \dfrac{1+\cos(2k\theta)}{2}}$.

2. Soient $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 1 \iff 2\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff \theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Donc $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} \neq 1$ et

   $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^k = \frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}$.

   En factorisant par l'angle de moitié, on obtient :

   $S_n = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \underset{\text{Euler}}{=} \dfrac{-2\mathrm{i}\sin((n+1)\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{-2\mathrm{i}\sin(\theta)}$.

   Donc $\boxed{S_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}$, avec $\lambda = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \in \mathbb{R}$ et $\alpha = n\theta \in \mathbb{R}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) \underset{1.}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1+\cos(2k\theta)}{2} \underset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)$.

   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta) \underset{\text{Moivre}}{=} \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^k\right) \underset{2.(a)}{=} \frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin(\theta)}$.

   Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) = \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{2\sin(\theta)}}$.

3. Si $\theta = \pi/9$ et $n = 4$, on obtient :

$$1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{5}{2} + \frac{\sin(5\pi/9)\cos(4\pi/9)}{2\sin(\pi/9)}.$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{4\pi}{9}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{9}-\frac{4\pi}{9}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right].$$

Comme $\sin(\pi) = 0$, on a :

$$1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{5}{2} + \frac{\sin(\pi/9)}{4\sin(\pi/9)} = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}.$$

Donc, $\boxed{1 + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\dfrac{3\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\dfrac{4\pi}{9}\right) = \dfrac{11}{4}}$.

Exercice 2 (7 points) 1) 1 2) 1.5 3) 1.5 4) 1.5 5) 1.5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$, on pose $f(z) = \dfrac{z-4+3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}}$

1. $f(2-5\mathrm{i}) = \dfrac{2-5\mathrm{i}-4+3\mathrm{i}}{-4\mathrm{i}} = \dfrac{-2-2\mathrm{i}}{-4\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$.

   Donc $\boxed{f(2-5\mathrm{i}) = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}$.

2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$, on a :

   $$f(z) = \omega \Longleftrightarrow \frac{z-4+3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}} = \omega \Longleftrightarrow z-4+3\mathrm{i} = z\omega+(-2+\mathrm{i})\omega \Longleftrightarrow z(1-\omega) = 4-3\mathrm{i}+(-2+\mathrm{i})\omega.$$

   $\boxed{\text{Si } \omega \neq 1, \text{ l'équation } f(z)=\omega \text{ admet pour unique solution } z_0 = \dfrac{4-3\mathrm{i}+(-2+\mathrm{i})\omega}{1-\omega}}$.

   $\boxed{\text{Si } \omega = 1, \text{ l'équation } f(z)=\omega \text{ n'admet pas de solution}}$, car $4-3\mathrm{i}+(-2+\mathrm{i})\omega = 2-2\mathrm{i} \neq 0$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$. On a :

   $$f(z) = z \Longleftrightarrow \frac{z-4+3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}} = z \Longleftrightarrow z-4+3\mathrm{i} = z^2+(-2+\mathrm{i})z \Longleftrightarrow z^2+(-3+\mathrm{i})z+4-3\mathrm{i} = 0,$$

   qui est une équation du second degré de discriminant
   $\Delta = (-3+\mathrm{i})^2 - 4(4-3\mathrm{i}) = -8+6\mathrm{i}$.
   On cherche $\delta = x+\mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, tel que

   $$\delta^2 = \Delta \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^2-y^2 & = & -8 \\ 2xy & = & 6 \\ x^2+y^2 & = & \sqrt{(-8)^2+6^2} = 10 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^2 & = & 1 \\ y^2 & = & 9 \\ xy & = & 3>0 \end{array}\right. .$$

   Donc $\delta = 1+3\mathrm{i}$ convient et les solutions de l'équation $f(z) = z$ sont

   $$\boxed{z_1 = \frac{3-\mathrm{i}-1-3\mathrm{i}}{2} = 1-2\mathrm{i} \text{ et } z_2 = \frac{3-\mathrm{i}+1+3\mathrm{i}}{2} = 2+\mathrm{i}},$$

   qui sont les affixes des seuls points du plan invariants par f.

4. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$.

   Correction géométrique :
   $|f(z)| = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{|z-4+3\mathrm{i}|}{|z-2+\mathrm{i}|} = 1 \Longleftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Longleftrightarrow AM = BM$ où $A(4-3\mathrm{i}$, $B(2-\mathrm{i})$ et $M(z)$

Donc $\boxed{E \text{ est la médiatrice du segment } [AB]}$, qui ne contient pas le point B évidemment.

Correction analytique :
$|f(z)| = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{|z-4+3\mathrm{i}|}{|z-2+\mathrm{i}|} = 1 \Longleftrightarrow |z-4+3\mathrm{i}|^2 = |z-2+\mathrm{i}|^2$,
car tout est positif. Donc

$|f(z)| = 1 \Longleftrightarrow (\overline{z}-4-3\mathrm{i})(z-4+3\mathrm{i}) = (\overline{z}-2-\mathrm{i})(z-2+\mathrm{i}) \Longleftrightarrow -2(z+\overline{z})-2\mathrm{i}(z-\overline{z})+20 = 0$

En posant $z = x+\mathrm{i}y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,2)\}$, on a $|f(z)| = 1 \Longleftrightarrow x-y-5 = 0$

On vérifie que $z = 2-\mathrm{i}$ n'est pas solution

Donc $\boxed{E \text{ est la droite d'équation } x-y-5=0}$

5. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$.

Correction géométrique : $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Longleftrightarrow \dfrac{z-z_A}{z-z_B} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Longleftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
où $A(4-3\mathrm{i}$, $B(2-\mathrm{i})$ et $M(z)$

$\boxed{F \text{ est le cercle de diamètre [AB], privé du point B}}$

Correction analytique : $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{\left(\dfrac{z-4+3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}}\right)} = -\dfrac{z-4+3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}}$ donc

$f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Longleftrightarrow (\overline{z}-4-3\mathrm{i})(z-2+\mathrm{i}) = (4-3\mathrm{i}-z)(\overline{z}-2-\mathrm{i}) \Longleftrightarrow 2z\overline{z}-6(z+\overline{z})-4\mathrm{i}(z-\overline{z})+11 = 0.$

En posant $z = x+\mathrm{i}y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,2)\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\Longleftrightarrow (x^2+y^2)-6x+4y+11 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2 = 9+4-11 = 2. \end{aligned}$$

Or $x = 2, y = -1$ est solution de cette équation donc

$\boxed{F \text{ est le cercle de centre } \Omega\,(3-2\mathrm{i}) \text{ de rayon } r = \sqrt{2}, \text{ privé du point } B \text{ d'affixe } 2-\mathrm{i}}$.

Exercice 3 (9 points) 1) 1 + 0.5 + 0.5 2) 0.5 + 0.5 + 1.5 + 1.5 + 0.5 3) 0.5 + 0.5 + 0.5 + 1

1. (a) Par le calcul on trouve que $U^2 = U$. Démontrons que $\forall k \in \mathbb{N}^*, U^k = U$.

   La propriété est vraie au rang 1 et si $U^k = U$ à un rang $k \in \mathbb{N}^*$ (HR), alors on a :

   $U^{k+1} = U^kU = UU = U^2 = U$ et la propriété est vraie au rang $k+1$.

   Par récurrence, on a $\boxed{U^k = U \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$.

   $\boxed{\text{Cette égalité est fausse pour } k = 0}$ car $U^0 = I_3 \neq U$.

(b) I_3 et U commutent donc, par la formule du binôme, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (I_3+U)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} U^k}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(I_3+U)^n = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} U = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\right) U$.

$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1$ et $A = I_3 + U$ donc $\boxed{A^n = I_3 + \lambda_n U, \text{ avec } \lambda_n = 2^n - 1}$.

$\lambda_0 = 0$ et $A^0 = I_3$ donc $\boxed{\text{la formule est encore vraie pour } n = 0}$.

2. (a) Par le calcul on trouve que $\boxed{A^2 = 3A - 2I_3}$.

(b) Donc $A(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3) = (-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3)A = I_3$.

Donc $\boxed{A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

(c) Démontrons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— $A^0 = a_0 A + b_0 I_3$ où $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. La propriété est vraie au rang 0.

— Supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$. (HR)

$A^{n+1} = AA^n \underset{\text{(HR)}}{=} A(a_n A + b_n I_3) = a_n A^2 + b_n A I_3 \underset{2.(a)}{=} a_n(3A - 2I_3) + b_n A$.

Donc $A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I_3$ avec $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = a_n A + b_n I_3}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, on a les relations $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $\boxed{b_{n+1} = -2a_n}$.

Remplacons n par $n+1$ dans la première relation : $a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1}$. Avec la deuxième relation on obtient alors $\boxed{a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n}$.

(a_n) est une SRL2 d'équation caractéristique $q^2 - 3q + 2 = 0$, de racines évidentes $q_1 = 1$ et $q_2 = 2$.

Donc il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = C_1 \times 1^n + C_2 \times 2^n = C_1 + 2^n C_2$.

De plus, $a_0 = 0$, $a_1 = 3a_0 + b_0 = 3 \times 0 + 1 = 1$ et

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^n - 1}$.

Si $n \geq 0,\ b_{n+1} = -2a_n$ donc si $n \geq 1,\ b_n = -2a_{n-1} = -2(2^{n-1} - 1) = -2^n + 2$, ce qui est encore vrai pour $n = 0$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 2 - 2^n}$.

(e) $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3 =$
$$\begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 2 & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 2^n \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et pour } n = -1 \text{ on retrouve bien } A^{-1}}$.

3. (a) Par le calcul, on trouve $\boxed{P^2 = I_3}$. Donc $\boxed{P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = P}$.

(b) Par le calcul, on trouve $\boxed{PDP = A}$.

(c) D est une matrice diagonale inversible car ses coefficients diagonaux sont non nuls.

On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible}}$, comme produit de matrices inversibles, et on a :
$$\boxed{A^{-1} = P^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P}.$$

(d) Démontrons d'abord cette propriété par récurrence sur $\mathbb{N}$.

— $A^0 = I_3$ et $PD^0P = PI_3P = P^2 = I_3$ donc la propriété est vraie au rang 0.

— Supposons que $A^n = PD^nP$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR). Donc
$A^{n+1} = A^nA \underset{\text{(HR)}}{=} PD^nPPDP = PD^nI_3DP = PD^{n+1}P$ et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $A^{-n} = (A^n)^{-1} = (PD^nP)^{-1} = P^{-1}D^{-n}P^{-1} = PD^{-n}P$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z},\ A^n = PD^nP}$ et on a :
$$A^n = PD^nP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$