Ex1 0) Comme produit de fonctions C^1, ϕ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $\phi'(x) = -(2+x)e^x$. D'autre part $\phi(-2) = 1+\frac{1}{e^2} > 1$, $\phi(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \phi(x) = 0^+$ puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$.

D'où

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$\phi(x)$	0^+	↗ $+$		↘ $+$	0	↘ $-$	

Ainsi x et $\phi(x)$ sont de signes contraires, i.e. $x\phi(x)\leq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

1) $f(x) = e^{(1-x)\ln x}$ donc, comme composée de l'exponentielle avec un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = e^{(1-x)\ln x}\cdot\left[-\ln x + \frac{1-x}{x}\right] = \frac{f(x)}{x}\left[1-x-x\ln x\right]$

soit $f'(x) = \frac{f(x)}{x}\left[1-x(1+\ln x)\right]$

Or $\phi(\ln x) = 1-(1+\ln x)e^{\ln x} = 1-x(1+\ln x)$.

On a donc bien $\boxed{f'(x) = \frac{f(x)}{x}\phi(\ln x)\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*}$

2) Comme $\frac{f(x)}{x} > 0$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, on déduit du 0)

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$\phi(\ln x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

3) $\forall x>0$, $\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = x^{-x} = e^{-x\ln x}$ or $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} \overset{F.D.}{=} e^{-0} = 1$

$\tilde{f}$ est dérivable en 0 avec $\tilde{f}'(0) = 1$

4) D'après le 3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$. D'autre part $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ d'où $\lim_{x\to 0^+} \phi(\ln x) = 1$. Par conséquent

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}\phi(\ln x) \overset{F.D}{=} 1\times 1 = 1 = \tilde{f}'(0)$$

On a donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = \tilde{f}'(0)}$

5) D'après 2) f restreinte à $[1,+\infty[$ est continue (car dérivable) et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection sur son image $J =]0,1]$ (corollaire du TVI)

$g^{-1} : J =]0,1] \to [1,+\infty[$ est donc continue sur tout J (puisque g l'est sur $[1,+\infty[$).

Comme $g'(x)$ ne s'annule qu'en 1, g^{-1} est dérivable sur $]0,1[= J\setminus\{g(1)\}$.

6) $g(2) = 2^{1-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. D'où $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{g'(2)}$

Or $g'(2) = f'(2) = \frac{f(2)}{2}\phi(\ln 2) = \frac{1}{4}\left[1-2(1+\ln 2)\right]$

$= \frac{1}{4}\left[-1-2\ln 2\right] = -\frac{(1+\ln 4)}{4}$

Ainsi $\boxed{g(2) = \frac{1}{2} \text{ et } (g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{1+\ln 4}}$

Ex2 1) $X^2+X+1 = \left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ $\forall X\in\mathbb{R}$. Par suite, avec $X = \operatorname{sh} x$, on a que $\psi(x) \geq \frac{3}{4} > 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

2) $\boxed{h'(x) = e^{\operatorname{sh} x}\operatorname{ch} x - 1}$ et $h''(x) = e^{\operatorname{sh} x}(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x)$

Or $\operatorname{ch}^2 x = 1+\operatorname{sh}^2 x$. D'où $\boxed{h''(x) = e^{\operatorname{sh} x}\psi(x)}$

3)

x	-1		0		1
$h''(x)$		$+$		$+$	
$h'(x)$		$-\nearrow$	0	$\nearrow +$	
$h(x)$		$+\searrow$	0	$\nearrow +$	

4) D'après 3) $h(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1[\Rightarrow 1+x \leq e^{sh(x)} \quad \forall x \in [0,1[$

Aussi $h(x) \geq 0 \quad \forall x \in]-1,0] \Rightarrow h(-x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1[$

$\Rightarrow e^{-sh x} + x - 1 \geq 0 \quad \forall x \in [0,1[$ soit $\dfrac{1}{e^{sh x}} \geq 1-x$

par suite $e^{sh x} \leq \dfrac{1}{1-x}, \quad \forall x \in [0,1[$.

synthèse : $\boxed{\forall x \in [0,1[, \quad 1+x \leq e^{sh x} \leq \dfrac{1}{1-x}}$

5) $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k} \in [0,1[$ et d'après 4) satisfait

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq sh\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

Par sommation cela donne $\forall n \geq 2$:

$$\sum_{k=n}^{pn} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{pn} sh\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{pn} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

Mais, par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=n}^{pn} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{pn} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$

$= \ln(pn+1) - \ln(n) = \ln\left(\dfrac{pn+1}{n}\right)$

et $\displaystyle\sum_{k=n}^{pn} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \sum_{k=n}^{pn} \left(\ln(k) - \ln(k-1)\right) = \ln(pn) - \ln(n-1) = \ln\left(\frac{pn}{n-1}\right)$

On a bien $\boxed{\ln\left(\dfrac{np+1}{n}\right) \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{pn} sh\left(\frac{1}{k}\right) \leq \ln\left(\dfrac{np}{n-1}\right), \ \forall n \geq 2}$

6) $\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \ln\left(p+\frac{1}{n}\right)$ et $\ln\left(\frac{np}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{p}{1-\frac{1}{n}}\right)$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \ln p = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{np}{n-1}\right)$.

Le théorème des gendarmes couplé à la question 5) nous permet de conclure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln p}.$$

Ex3 0) $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3}$

$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$ donc tend vers le nombre dérivé de $\ln x$ en 1 lorsque x tend vers 1 :

d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to1} x^3\frac{\ln x}{x-1} = 1\times\frac{1}{1} = 1}$

1) Posons $y_p = -x^3$. Alors $y_p' = -3x^2$ d'où
$x\ln x\, y_p' - (3\ln x+1)y_p = x\ln x(-3x^2) - (3\ln x+1)(-x^3)$
$= -3x^3\ln x + 3x^3\ln x + x^3 = x^3$

<u>$y_p = -x^3$ est solution de (E)</u>

2) Soit (H) : $x\ln x\, y' - (3\ln x+1)y = 0$ l'équation homogène associée.

Avec $a(x) = -\frac{3\ln x+1}{x\ln x} = -\frac{3}{x} - \frac{1}{x\ln x}$,

$A(x) = -3\ln x - \ln(|\ln x|)$ en est une primitive i.e. $A' = a$. Sur $]0,1[$, $A(x) = -3\ln x - \ln(-\ln x)$

De fait, l'ensemble $\mathcal{S}^{]0,1[}_{(E)}$ des solutions de (E) sur $]0,1[$ est :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E)}^{]0,1[} = \left\{-x^3 + C_1 x^3 \ln x \ , \ C_1 \in \mathbb{R}\right\}}$$

3) De même qu'au 2) on obtient que l'ensemble des solutions de (E) sur $]1,+\infty[$ est :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E)}^{]1,+\infty[} = \left\{-x^3 + C_2 x^3 \ln x \ , \ C_2 \in \mathbb{R}\right\}}$$

4) D'après 2) et 3) une telle fonction est définie par morceaux de la façon suivante : il existe $C_1, y_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telle que

$$y(x) = \begin{cases} -x^3 + C_1 x^3 \ln x & \text{si } x \in]0,1[\\ y_1 & \text{si } x = 1 \\ -x^3 + C_2 x^3 \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Notons y_{C_1,y_1,C_2} cette fonction.

Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{(E)}^{*} = \left\{ y_{C_1,y_1,C_2} \ , \ C_1, y_1, C_2 \in \mathbb{R}\right\}}$

5) y_{C_1,y_1,C_2} est dérivable en 1 si et seulement si

$\tau(x) = \dfrac{y_{C_1,y_1,C_2}(x) - y_{C_1,y_1,C_2}(1)}{x-1}$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1.

Or $\tau(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^3 + C_1 x^3 \ln x - y_1}{x-1} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{-x^3 + C_2 x^3 \ln x - y_1}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

et $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to 1} x^3 \ln x = 0$, pour que

$\tau(x)$ ait une limite finie en 1 il est déjà nécessaire que $y_1 = -1$ pour que son numérateur tende également vers 0

Mais alors $\tau(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^3-1}{x-1} + C_1 \dfrac{x^3 \ln x}{x-1} & \text{si } x<1 \\ -\dfrac{x^3-1}{x-1} + C_2 \dfrac{x^3 \ln x}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

et d'après 0) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = 3$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 \ln x}{x-1} = 1$.

Par suite $\lim\limits_{x \to 1^-} \tau(x) = -3 + C_1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \tau(x) = -3 + C_2$.

Conclusion il est nécessaire et suffisant que $y_1 = -1$ et $C_1 = C_2$ pour que y_{C_1, y_1, C_2} soit dérivable en 1.

$$\boxed{\mathcal{S}^d_{(E)} = \{ y_{C,-1,C} \,,\ C \in \mathbb{R} \} \quad \text{où} \quad y_{C,-1,C}(x) = \begin{cases} -x^3 + C x^3 \ln x & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}}$$

6) On sait que $y_{C,-1,C}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ quel que soit $C \in \mathbb{R}$. Vérifions qu'elle satisfait également (E) en 1.

$y'_{C,-1,C}(1) = -3 + C$ d'après 5) et $y_{C,-1,C}(1) = -1$

d'où, en remplaçant x par 1 dans le membre de gauche de (E), on obtient

$$1 \cdot \ln(1)(-3+C) - (3 \ln 1 + 1)(-1) = 1 = 1^3$$

soit son membre de droite où x a été remplacé par 1.

$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{S}^d_{(E)} \text{ est l'ensemble des solutions de (E) sur } \mathbb{R}_+^*}$ (puisqu'on savait déjà qu'il le contenait)