Concours blanc n° 1

La partie 1 doit être traitée séparément de la partie 2. Outre votre nom et votre classe, vous indiquerez Partie 1 et Partie 2 sur ces copies et emboîterez les feuillets correspondants dans le bon ordre de lecture. Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Partie 1

Rappel : Si $f : E \to F$ est une application et S un sous-ensemble de E, on appelle restriction de f à S, souvent notée $f_{|S}$, l'application $f_{|S} : S \to F$ qui à $x \in S \subset E$ associe $f_{|S}(x) = f(x)$.

Exercice 1 (7.5 points) : 0) 0.5 + 0.5 1) 0.5 + 0.5 2) 1 3) 1 4) 1 5) 0.5+0.5+0.5 6) 0.25+0.75

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^{1-x}$.

1. Dresser le tableau de variations de $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = 1 - (1+x)\mathrm{e}^x$.
   En déduire que $x\phi(x) \leqslant 0$ pour tout x.
2. Montrer que f est dérivable sur tout $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}\,\phi(\ln(x))$.
3. En déduire son tableau de variations.
4. Notons $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction dont la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ s'identifie à f et telle que $\tilde{f}(0) = 0$. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 en évaluant son nombre dérivé $\tilde{f}'(0)$.
5. Déterminer la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0 et comparer la à $\tilde{f}'(0)$.
6. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [1, +\infty[$. Justifier que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser. Sur quel ensemble g^{-1} est-elle continue ? dérivable ?
7. Que valent $g(2)$ puis $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (nombre dérivé de g^{-1} en $\dfrac{1}{2}$) ?

Exercice 2 (6 points) 1) 0.5 2) 0.5+0.5 3) 0.5+0.5 4) 0.5+1 5) 1 6) 1

1. Soit $\psi(x) = \text{sh}^2(x) + \text{sh}(x) + 1$. Montrer que $\psi(x) > 0$ pour tout réel x.

2. On considère maintenant la fonction $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = e^{\text{sh}(x)} - x - 1$. Calculer $h'(x)$ et h''(x). Observer que $h''(x) = \psi(x)e^{\text{sh}(x)}$.

3. En déduire les tableaux de variations et de signes de h' puis de h.

4. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$ on a $1 + x \leqslant e^{\text{sh}(x)} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire du 4) que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2 , alors

$$\ln\left(\frac{\text{np}+1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\text{pn}} \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln\left(\frac{\text{np}}{n-1}\right)$$

1. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\text{pn}} \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$.

Exercice 3 (6.5 points) : 0) 1+1 1) 1 2) 1 3) 1 4) 0.5 5) 0.5 6) 0.5

Considérons l'équation différentielle $(E) : x\ln(x)y' - (3\ln(x) + 1)y = x^3$ d'ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer les limites de $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ et $\dfrac{x^3\ln(x)}{x - 1}$ lorsque x tend vers 1 .

2. Montrer que (E) admet une solution monomiale (i.e. $y_p(x) = Ax^n$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$)

3. Résoudre (E) sur $]0, 1[$.

4. Résoudre (E) sur $]1, +\infty[$.

On cherche à présent de construire l'ensemble des solutions de (E) sur tout son ensemble de définition.

1. Décrire l'ensemble $S_{(E)}^*$ des fonctions définies sur tout $\mathbb{R}_+^*$ mais solutions de (E) uniquement sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On en donnera une représentation paramétrique à 3 paramètres.

2. Quelles sont les fonctions de $S_{(E)}^*$ dérivables en 1 ? On pourra utiliser la question 0) et on notera $S_{(E)}^d$ ce sous-ensemble. Bien sûr $S_{(E)}^d \subset S_{(E)}^*$.

3. Expliquer pourquoi $S_{(E)}^d$ n'est autre que l'ensemble de toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie 2

Exercice 1 (4 points) : 1) 0.5 2) 1 + 1 3) 1.5

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Linéariser $\cos^2(k\theta)$.

2. Soient $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Écrire $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\theta}$ sous la forme $\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, où $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) = \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{2\sin(\theta)}$

3. Déduire de ce qui précède que

$$1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{11}{4}$$

Exercice 2 (7 points) 1) 1 2) 1.5 3) 1.5 4) 1.5 5) 1.5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{2\mathrm{i}\}$, on pose $f(z) = \dfrac{z - 4 - 3\mathrm{i}}{z - 2 + \mathrm{i}}$

1. Écrire $f(2 - 5\mathrm{i})$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé.

   Déterminer, suivant les valeurs de ω, le nombre de solution(s) de l'équation $f(z) = \omega$.

3. Résoudre l'équation $f(z) = z$.

   Interpréter géométriquement le résultat.

4. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.

5. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Exercice 3 (9 points) 1) 1 + 0.5 + 0.5 2) 0.5 + 0.5 + 1.5 + 1.5 3) 0.5 + 0.5 + 0.5 + 1.5

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que I_3 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Le but du problème est de calculer A^n de trois façons différentes.

1. (a) Établir l'égalité $U^k = U$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Cette relation est-elle vraie pour $k = 0$?

   (b) Développer le produit $(I_3 + U)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) En déduire que A^n peut s'exprimer sous la forme $I_3 + \lambda_n U$ où λ_n est un nombre réel à calculer.

2. (a) Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.

   (b) En déduire que A est inversible puis expliciter A^{-1}.

   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

   (d) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

   (e) Retrouver ainsi l'expression des coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Est-elle valable pour $n = -1$?

3. (a) Calculer P^2. En déduire l'inversibilité de P ainsi que P^{-1}.

   (b) Expliciter les coefficients du produit PDP. Que remarque-t-on ?

   (c) Retrouver ainsi que A est inversible puis exprimer A^{-1} en fonction de P et D^{-1}.

   (d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z},\ A^n = PD^nP$. En déduire les coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.