Devoir maison n° 13

A rendre le jeudi 8 février 2024

Exercice 1 Polynômes de Tchebychev

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $\begin{cases} P_0 = 1, \\ P_1 = X, \\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Déterminer P_2 et P_3.

2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\quad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \quad (\star)$.

   Indication : On pourra utiliser la formule $2\cos p \cos q = \cos(p+q) + \cos(p-q)$

3. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation $(\star)$.

   Indication : On pourra démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}$

   $$P_{n+2}(\cos\theta) + P_n(\cos\theta) = 2\cos\theta P_{n+1}(\cos\theta)$$

   puis déterminer le nombre de racines du polynôme $P_{n+2} + P_n - 2XP_{n+1}$

4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{R}$.

6. En déduire l'expression factorisée de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

   Vérifier que l'on retrouve ainsi P_2 et P_3.

Exercice 2 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère le polynôme $P_n = (X+1)^n - 1$.

1. Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{C}$, puis factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Montrer qu'il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n = XQ_n$.

   On écrira Q_n sous forme développée et factorisée.

3. En évaluant $Q_n(0)$ de deux façons différentes, calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.