Géométrie dans le plan

1 Coordonnées dans le plan

Définition 1. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. On note Vect($\vec{u}$) l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

Définition 2. On appelle **base du plan** tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
On appelle **repère cartésien** du plan tout couple $(O, \mathcal{B})$ où O est un point appelé **origine du repère** et $\mathcal{B}$ une base du plan.

Définition 3. On appelle **coordonnées cartésiennes** d'un point M (resp. d'un vecteur $\vec{u}$) du plan les nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (resp. $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$).

Remarque : Les coordonnées d'un point ou d'un vecteur sont uniques.

Définition 4. Une base et un repère sont dits **orthogonaux** si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux. Ils sont dits **orthonormés** lorsque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1 et orthogonaux.
Une base et un repère sont dits **directs** si l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ a une mesure dans $]0,\pi[$, et **indirects** sinon.

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Théorème 1. Soient $A(x_A\ ,\ y_A)$ et $B(x_B\ ,\ y_B)$ deux points du plan et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Définition 5. On appelle **coordonnées polaires** d'un point M distinct de l'origine (resp. d'un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$) du plan les nombres réels $r > 0$ et θ tels que :

$$\begin{cases} OM = r \\ \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{cases} \qquad \left(\text{resp. } \begin{cases} \|\vec{u}\| = r \\ \left(\vec{i}, \vec{u}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}\right)$$

Remarque : Il n'y a pas unicité pour la coordonnée θ, définie modulo 2π.

2 Produit scalaire dans le plan

Définition 6. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le nombre réel

$$\begin{array}{ll} \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{lorsque } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont tous deux non nuls} \\ \vec{u}.\vec{v} = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

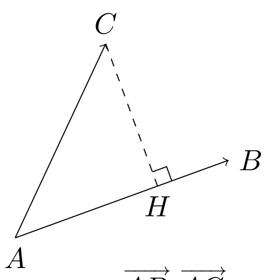
Remarques : 1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
En particulier $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposé alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Définition 7. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. On appelle **projection orthogonale** d'un point M sur la droite $\mathcal{D}$ l'unique point H de la droite $\mathcal{D}$ tel que les droites (MH) et $\mathcal{D}$ soient orthogonales.

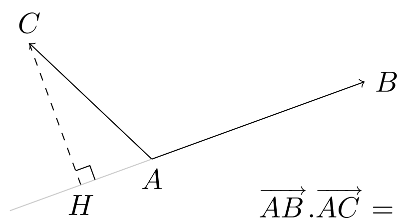
Remarque : Lorsque le point M appartient à la droite $\mathcal{D}$, il est confondu avec son projeté.

Proposition 1. Si A, B, C sont trois points distincts et si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) alors

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB.AH & \text{si } H \in [AB] \\ -AB.AH & \text{sinon} \end{cases}$$



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AH$



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB.AH$

Théorème 2. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Exemple 1. Pour quelles valeurs du nombre réel a les vecteurs $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + (2+a)\vec{j}$ et $\vec{v} = a\vec{i} - a\vec{j}$ sont-ils orthogonaux ?

Propriété 1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs alors $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$. Le produit scalaire est **symétrique**.

Théorème 3. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Propriété 2. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs du plan et si λ et μ sont des nombres réels alors

1. $\vec{u}.\left(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}\right) = \lambda(\vec{u}.\vec{v}) + \mu(\vec{u}.\vec{w})$ **Linéarité à droite**
2. $\left(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\right).\vec{w} = \lambda(\vec{u}.\vec{w}) + \mu(\vec{v}.\vec{w})$ **Linéarité à gauche**

On dit que le produit scalaire est **bilinéaire.**

Exemple 2. Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.
2. L'angle $\widehat{ACB}$ est-il aigu ou obtus ?

Proposition 2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs du plan alors $\left\|\overrightarrow{u+v}\right\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

3 Produit mixte dans le plan

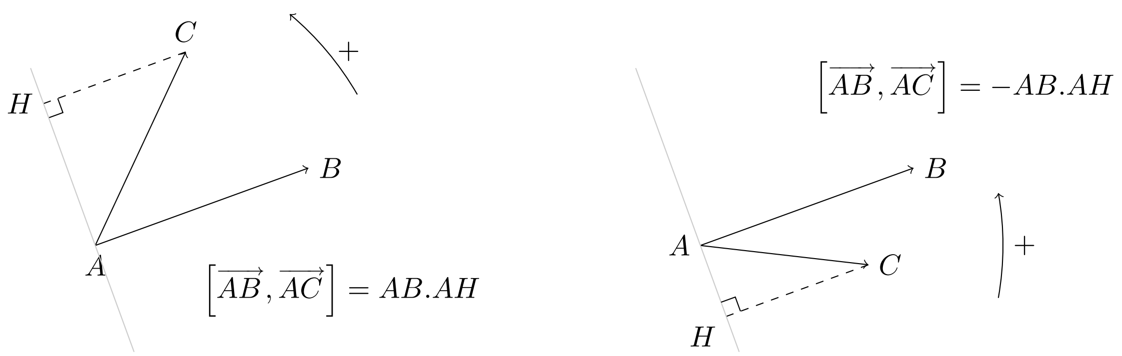
Définition 8. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$sont deux vecteurs, on appelle **produit mixte** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $[\vec{u},\vec{v}]$, le nombre réel

$$[\vec{u},\vec{v}] = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right) \quad \text{lorsque } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont tous deux non nuls}$$
$$[\vec{u},\vec{v}] = 0 \quad \text{sinon}$$

Remarques : 1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux dans le sens direct, c'est-à-dire si $(\vec{u},\vec{v}) = +\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$, alors $[\vec{u},\vec{v}] = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux dans le sens indirect, c'est-à-dire si $(\vec{u},\vec{v}) = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$, $[\vec{u},\vec{v}] = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
3. Pour tout vecteur $\vec{u}$, $[\vec{u},\vec{u}] = 0$.

Proposition 3. Si A, B, C sont des points distincts et si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite perpendiculaire à (AB) passant par A alors

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{cases} AB.AH & \text{lorsque } \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right)=+\frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ -AB.AH & \text{lorsque } \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right)=-\frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$$



Interprétation géométrique $|[\vec{u},\vec{v}]|$ est l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Théorème 4. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $[\vec{u},\vec{v}]=0$.

Propriété 3. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs du plan alors $[\vec{u},\vec{v}]=-[\vec{v},\vec{u}]$.
Le produit mixte est **antisymétrique**.

Théorème 5. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont des vecteurs du plan alors $[\vec{u},\vec{v}]=xy'-x'y$

Exemple 3. Calculer l'aire du triangle ABC :
a) A$(1\ ,\ -1)$ B$(4\ ,\ -5)$ et C$(0\ ,\ -3)$ b) A$(-2\ ,\ -2)$ B$(6\ ,\ -1)$ et C$(0\ ,\ 2)$

Propriété 4. Bilinéarité du produit mixte
Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$sont des vecteurs du plan et si λ et μ sont des nombres réels alors

$[\vec{u},\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}]=\lambda[\vec{u},\vec{v}]+\mu[\vec{u},\vec{w}]$ **Linéarité à droite**

$[\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\vec{w}]=\lambda[\vec{u},\vec{w}]+\mu[\vec{v},\vec{w}]$ **Linéarité à gauche**

Exemple 4. Trouver les valeurs du réel a pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :
a) $\vec{u}=(1+a)\vec{i}+(2-a)\vec{j}$ et $\vec{v}=a\vec{i}-2a\vec{j}$ b) $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}$ et $\vec{v}=(1+a)\vec{i}+(1-a)\vec{j}$

4 Droites dans le plan

Définition 9. Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul. On appelle **droite passant par** A **et de vecteur directeur** $\vec{u}$ l'ensemble des points M pour lesquels $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
Cette droite est notée $D = A + \text{Vect}(\vec{u})$ où $\text{Vect}(\vec{u})$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$

Théorème 6. Équation d'une droite
La droite passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ admet pour équation

- $\left[\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right] = \alpha(y - y_A) - \beta(x - x_A) = 0$ **Équation cartésienne**
- $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ **Représentation paramétrique**

La droite passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ admet pour équation

- $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ **Équation cartésienne**

Remarques : Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
Une telle droite admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et comme vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Exemple 5.
1. Donner une équation cartésienne de la droite D passant par le point $A(1\ ,\ 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3\ ,\ 0)$.
2. Donner une équation cartésienne de (AB) où $A(1\ ,\ 2)$ et $B(2\ ,\ 0)$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\vec{n}(1\ ,\ 2)$ passant par le point $A(1\ ,\ 1)$.

Proposition 4. La droite D passant par $A(x_A, y_A)$ et de coefficient directeur ou pente m a pour équation réduite $y = mx + p$. Si $B(x_B, y_B) \in D$ alors $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Remarque Les droites d'équation $x = \lambda$ n'ont pas une équation réduite de la forme $y = mx + p$.

Proposition 5. Si une droite D a pour équation réduite $y = mx + p$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D et $\vec{n}\begin{pmatrix}m\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D.

De plus, si $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$ alors $m = \tan\theta$.

Théorème 7. Distance d'un point à une droite
Si H est le projeté orthogonal d'un point M sur une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ est $HM = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exemple 6. Déterminer la distance du point $M(-1\ ,\ -1)$ à la droite D de vecteur directeur $\vec{u}(3\ ,\ 4)$ passant par le point $A(3\ ,\ 2)$.

5 Cercles dans le plan

Définition 10. On appelle **cercle** de centre Ω et de rayon $R \in \mathbb{R}^+$ l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$.

Théorème 8. L'équation du cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon R est

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

Exemple 7.
1. Caractériser l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.
2. Caractériser l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - 1 = x - y$.
3. La droite D d'équation $2x + y - 2 = 0$ et le cercle C d'équation $x^2 + y^2 - 2x = 0$ sont-ils sécants ?

Théorème 9. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts.

Le cercle C de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

$M(x, y) \in C \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

Exemple 8. On considère un cercle $\mathscr{C}$ dont une équation est $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ et une droite $(d) : x - y - 8 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle $\mathscr{C}$ ainsi que son rayon.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection A et B du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite (d).
3. Déterminer les équations cartésiennes des tangentes au cercle $\mathscr{C}$ aux points A et B.
4. Démontrer que ces tangentes sont perpendiculaires et calculer les coordonnées de leur point d'intersection E puis vérifier que E appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.