

Géométrie dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j})

Exercice 1 Pour quelles valeurs du nombre réel m les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} m+3 \\ m+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ m-1 \end{pmatrix}$ constituent-ils :

1. une base du plan ?
2. une base orthogonale du plan ?

Exercice 2 On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) .

Exercice 3 Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

Démontrer que $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\| = \|2\vec{u} - 3\vec{v}\|$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

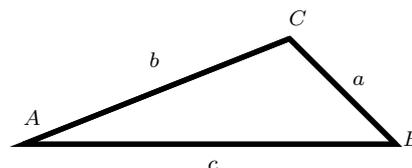
Exercice 4 Soit ABC un triangle quelconque. On note a, b, c les longueurs respectives de BC, AC, AB, S l'aire du triangle ABC et p son demi-périmètre.

1. (a) Développer $(\vec{BA} + \vec{AC}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AC})$.
- (b) En déduire que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC})$.

Formule d'Al Kashi

2. (a) Montrer que $[\vec{AB}, \vec{AC}]^2 + (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2 = b^2 c^2$.
- (b) En déduire que $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Formule de Héron



Exercice 5 Soit ABC un triangle quelconque. On note a, b, c les longueurs respectives de BC, AC, AB.

Démontrer que $\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})}$

Relation des sinus

Exercice 6 On considère un point A, un vecteur \vec{u} non nul du plan, un réel k ainsi que la droite $D = A + \text{Vect}(\vec{u})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $[\vec{u}, \vec{AM}] = k$.

Exercice 7 Soient $A(1;1), B(3;7)$ et $C(-1;3)$ trois points du plan.

1. (a) Déterminer les équations cartésiennes de deux médianes du triangle ABC.
- (b) Quelles sont les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC ?
2. (a) Déterminer les équations cartésiennes de deux médiatrices du triangle ABC.
- (b) Quelles sont les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC ?

3. (a) Déterminer les équations cartésiennes de deux hauteurs du triangle ABC.
- (b) Quelles sont les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC ?
4. Vérifier que H, G et Ω sont alignés.

Exercice 8 1. Soit D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Donner une équation cartésienne de la droite D .

2. On considère la famille de droites Δ_m d'équations cartésiennes $mx + (m - 1)y + 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

Pour quelle(s) valeur(s) du nombre réel m Δ_m est parallèle à D ?

Exercice 9 Soient $A(3; 1)$ et D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

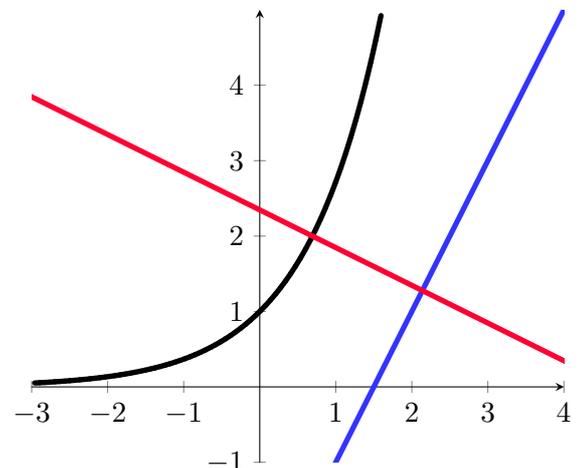
1. Donner une équation cartésienne de la droite D .
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D' perpendiculaire à D et passant par le point A.
3. On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite D .
Déterminer les coordonnées du point H.
4. On note A' le symétrique du point A par rapport à la droite D .
Déterminer les coordonnées de A'.

Exercice 10 Calculer la distance du point M à la droite D dans les cas suivants :

1. $M(4, -1)$ et D a pour équation cartésienne $x + 2y + 3 = 0$.
2. $M(0, 0)$ et $D = B + \text{Vect}(\vec{u})$ avec $B(5; 3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. $M(1, -1)$ et D est la droite passant par $B(2; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 On note C la courbe représentative de la fonction exponentielle, et D la droite d'équation réduite $y = 2x - 3$.

1. Montrer qu'il existe un point $M(x_0; y_0)$ de C tel que la distance de M à D soit minimale, puis déterminer cette distance.
2. Que peut-on dire de la tangente à la courbe C en x_0 ?



Exercice 12 On considère la droite D par l'équation $x + y + 1 = 0$ et pour tout réel m , on note C_m l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + 2mx + 2y + 2 = 0$.

1. Déterminer la nature de l'ensemble C_m suivant les valeurs de m .
2. On suppose que $|m| > 1$.
Étudier l'intersection de la droite D et de l'ensemble C_m .

Exercice 13 On considère l'équation : $x^2 + y^2 - 4kx - 2y + 4k = 0$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout réel k , cette équation est celle d'un cercle dont on précisera les caractéristiques.
2. Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?
3. Montrer que tous ces cercles sont tangents deux à deux en un même point.