Correction de l'exercice 7

1. Corrigé en cours.

2. Soit $P = X^4 + 2X^3 + 7X^2 + 8X + 12$. On cherche $y \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{i}y) = 0 &\iff (\mathrm{i}y)^4 + 2(\mathrm{i}y)^3 + 7(\mathrm{i}y)^2 + 8(\mathrm{i}y) + 12 = 0 \\ &\iff y^4 - 2\mathrm{i}y^3 - 7y^2 + 8\mathrm{i}y + 12 = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} y^4 - 7y^2 + 12 = 0 \\ -2y^3 + 8y = 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

   De plus, $-2y^3 + 8y = 0 \iff 2y(4 - y^2) = 0 \iff (y = 0 \text{ ou } y = -2 \text{ ou } y = 2)$.

   Comme -2 et 2 sont aussi des solutions de $y^4 - 7y^2 + 12 = 0$, on a : $P(-2\mathrm{i}) = P(2\mathrm{i}) = 0$.

   Donc P est divisible par $(X - 2\mathrm{i})(X + 2\mathrm{i}) = X^2 + 4$. En effectuant la division euclidienne de P par $X^2 + 4$, on obtient $P = (X^2 + 4)(X^2 + 2X + 3)$.

   $Q = X^2 + 2X + 3$ est de degré deux, de discriminant $\Delta = -8$ et de racines $z_1 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$.

   $\boxed{\text{Dans } \mathbb{C}[X],\ P = (X - 2\mathrm{i})(X + 2\mathrm{i})(X + 1 + \mathrm{i}\sqrt{2})(X + 1 - \mathrm{i}\sqrt{2})}$.

   $\boxed{\text{Dans } \mathbb{R}[X],\ P = (X^2 + 4)(X^2 + 2X + 3),}$ produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

3. Soit $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$. On a $P(3) = 0$ et $P' = 4X^3 - 15X^2 + 8X + 3$.

   $P'(3) = 0$ et $P'' = 12X^2 - 30X + 8$. $P''(3) \neq 0$ donc 3 est racine double de P.

   Donc P est divisible par $(X - 3)^2 = X^2 - 6X + 9$. En effectuant la division euclidienne de P par $X^2 - 6X + 9$, on obtient $P = (X^2 - 6X + 9)(X^2 + X + 1)$.

   $Q = X^2 + X + 1$ est de degré deux, de discriminant $\Delta = -3$ et de racines $z_1 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   $\boxed{\text{Dans } \mathbb{C}[X],\ P = (X - 3)^2 \left(X + \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(X + \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

   $\boxed{\text{Dans } \mathbb{R}[X],\ P = (X - 3)^2(X^2 + X + 1),}$ produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^{2n} + X^n + 1$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(z) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u^2 + u + 1 = 0 \\ u = z^n \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad z^n = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z^n = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad z^n = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3n}}\right)^n \text{ ou } z^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3n}}\right)^n \\
&\Longleftrightarrow \quad z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} \text{ ou } z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \\
&\Longleftrightarrow \quad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k-1)}{3n}} \text{ ou } z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}},\ k \in [\![0, n-1]\!].
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Dans } \mathbb{C}[X],\ P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k-1)}{3n}}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}\right)}.$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\pi - \frac{2\pi(3k+1)}{3n}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3(n-k)-1)}{3n}}$.

Donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k-1)}{3n}}\right) \underset{j=n-k}{=} \prod_{j=1}^{n}\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3(n-j)-1)}{3n}}\right) \underset{k=j}{=} \prod_{k=1}^{n}\left(X - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}}\right)$ et

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=1}^{n}\left(X - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}\right) \\
&= \left(X - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3n+1)}{3n}}}\right)\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3\times0+1)}{3n}}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}}\right)\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}}\right)\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}\right)
\end{aligned}$$

car $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3n+1)}{3n}}} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3n}}} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3\times0+1)}{3n}}}$.

Comme $\left(X - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}}\right)\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}\right) = X^2 - 2\mathrm{Ré}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}\right)X + \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(3k+1)}{3n}}\right|^2$, on a :

$$\boxed{\text{dans } \mathbb{R}[X],\ P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi(3k+1)}{3n}\right)X + 1\right)}.$$