Correction du Test n° 2

Sujet A

2. $z = \dfrac{-1+2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \dfrac{-1+2\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \dfrac{-\sqrt{3}-2+\mathrm{i}(2\sqrt{3}-1)}{4}$

3. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble E des points M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ tels que $Z = z^2+\overline{z}$ soit réel.

$Z = z^2+\overline{z} = (x+iy)^2+(x-iy) = x^2+x-y^2+i(2xy-y) = x^2+x-y^2+iy(2x-1)$. Ainsi, Z est réel si et seulement si Im $(Z) = 0 \iff y(2x-1) = 0 \iff y = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

Ainsi, l'ensemble E est la réunion des droites d'équation $y = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(4+\mathrm{i})z+5+5\mathrm{i} = 0$

$\Delta = (4+\mathrm{i})^2-4(5+5\mathrm{i}) = -5-12\mathrm{i} = \delta^2$ avec $\delta = x+\mathrm{i}y$

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 13 \\ x^2-y^2 &= -5 \\ 2xy = & -12 \end{cases}$$

ce qui donne $\delta = 2-3\mathrm{i}$ puis $z_1 = \dfrac{4+\mathrm{i}+2-3\mathrm{i}}{2} = 3-\mathrm{i}$ et $z_2 = \dfrac{4+\mathrm{i}-2+3\mathrm{i}}{2} = 1+2\mathrm{i}$

Correction du Test n° 2

Sujet B

2. $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{-1+\sqrt{3}+\mathrm{i}(-1-\sqrt{3})}{4}$

3.Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble E des points M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ tels que $Z = (1+z)(\mathrm{i}+\overline{z})$ soit réel.

$Z = (1+z)(i+\overline{z}) = \mathrm{i}+\overline{z}+\mathrm{i}z+z\overline{z} = \mathrm{i}+x-\mathrm{i}y+\mathrm{i}x-y+x^2+y^2 = x^2+y^2+x-y+\mathrm{i}(1-y+x)$.
Ainsi, Z est réel si et seulement si $\Im m(Z) = 0 \iff 1+x-y = 0 \iff y = x+1$.
L'ensemble E des points est donc la droite d'équation $y = x+1$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(-4+\mathrm{i})z+5+\mathrm{i} = 0$

$\Delta = (-4+\mathrm{i})^2-4(5+\mathrm{i}) = -5-12\mathrm{i} = \delta^2$ avec $\delta = x+\mathrm{i}y$

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 13 \\ x^2-y^2 &= -5 \\ 2xy = & -12 \end{cases}$$

ce qui donne $\delta = 2-3\mathrm{i}$ puis $z_1 = \dfrac{4-\mathrm{i}+2-3\mathrm{i}}{2} = 3-2\mathrm{i}$ et $z_2 = \dfrac{4-\mathrm{i}-2+3\mathrm{i}}{2} = 1+\mathrm{i}$