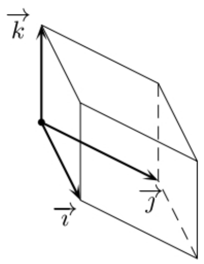
Géométrie dans l'espace

1 Coordonnées

Définition 1. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$

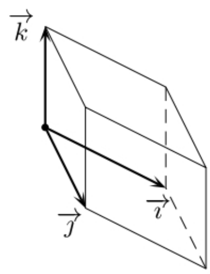
Définition 2. Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires on dit que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constitue **une base** de vecteurs de l'espace.
Lorsque $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont de norme 1 et orthogonaux, on dit que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormée**.
On appelle **repère cartésien** de l'espace tout couple $(O,\mathcal{B})$ où O est un point appelé origine du repère et $\mathcal{B}$ une base de l'espace.

Les repères de l'espace s'orientent de la même façon que les bases.
Les figures suivantes rappellent quelle convention est adoptée classiquement en matière d'orientation de l'espace.



La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **DIRECTE**.

La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **INDIRECTE**.



Définition 3. On appelle **coordonnées cartésiennes** d'un point M (resp. d'un vecteur $\vec{u}$) de l'espace les nombres réels x, y et z tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (\text{resp. } \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

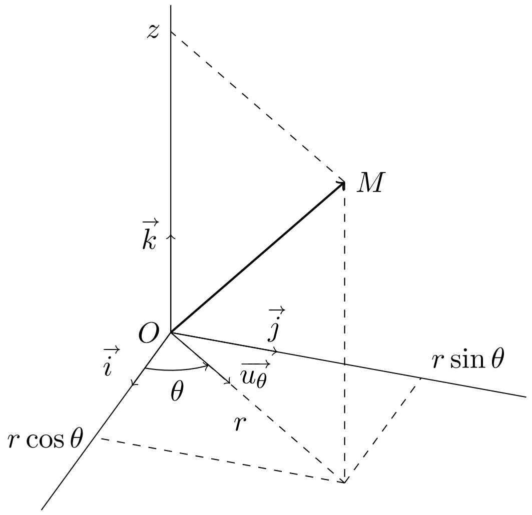
Remarque : Un point, ou un vecteur, admet un et un seul triplet de coordonnées cartésiennes.

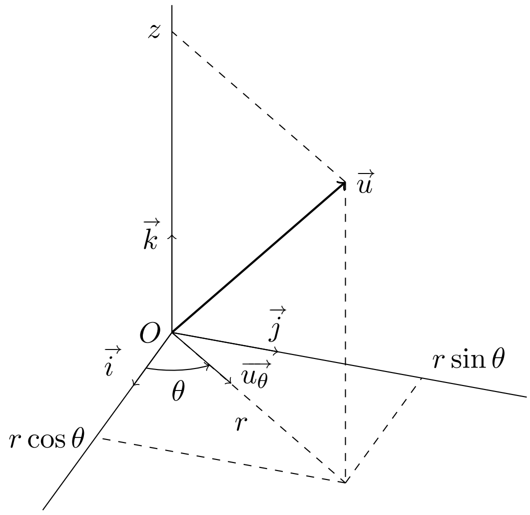
Exemple 1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Dans toute la suite, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Définition 4. On appelle **coordonnées cylindriques** d'un point M (resp. d'un vecteur $\vec{u}$) de l'espace les nombres réels r, θ et z tels que :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_\theta} + z\vec{k} \quad \left(\text{resp. } \vec{u} = r\overrightarrow{u_\theta} + z\vec{k}\right), \quad \text{où } \overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$





2 Produit scalaire dans l'espace

Deux vecteurs de l'espace étant toujours coplanaires, le produit scalaire dans l'espace se définit comme dans le plan et a les mêmes propriétés.

Théorème 1. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont des vecteurs de l'espace alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

et $\|\vec{u}\| = x^2 + y^2 + z^2$

Propriété 1. Le produit scalaire dans l'espace est **symétrique** et **bilinéaire**.

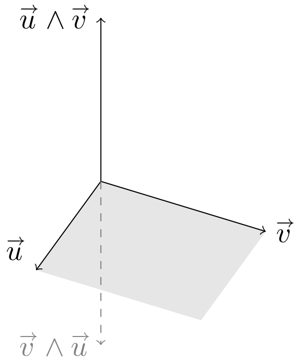
Exemple 2. On considère les points I(6 ; 0 ; 2), J(6 ; 3 ; 4) et K(3 ; 0 ; 4).

1. Vérifier que le triangle IJK est isocèle en I.
2. Calculer une valeur approchée à 0, 1 degré près de l'angle $\widehat{\text{JIK}}$.

3 Produit vectoriel dans l'espace orienté

Dans toute la suite, l'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ orthonormé direct.

Définition 5. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, on appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, et on note $\vec{u}\wedge\vec{v}$, le vecteur $\vec{n}$ orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de norme $\|\vec{n}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin(\vec{u},\vec{v})|$ et tel que la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ soit directe.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on pose $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$.



Théorème 2. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$

Interprétation $\left\|\overrightarrow{u\wedge v}\right\|$ est l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Théorème 3. Les coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont données par $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}yz'-y'z\\zx'-z'x\\xy'-x'y\end{pmatrix}$

Exemple 3. Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$ où $\vec{u}(1,0,-2)$ et $\vec{v}(1,1,0)$.

Propriété 2. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, λ et μ sont des nombres réels alors

1. $\vec{u}\wedge(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})+\mu(\vec{u}\wedge\vec{w})$ **Linéarité à droite**

2. $(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\wedge\vec{w} = \lambda(\vec{u}\wedge\vec{w})+\mu(\vec{v}\wedge\vec{w})$ **Linéarité à gauche**

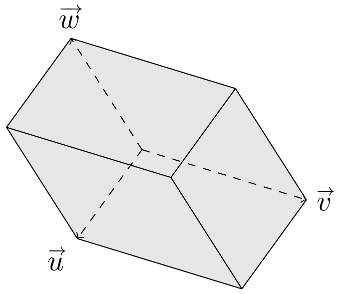
On dit que le produit vectoriel est **bilinéaire**.

$\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$. On dit que le produit vectoriel est **antisymétrique**

4 Produit mixte dans l'espace orienté

Définition 6. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace, on appelle **produit mixte** de ces trois vecteurs, et on note $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ le nombre $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$.

Remarque : La valeur absolue du produit mixte de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ est égale au volume du parallélépipède porté par ces trois vecteurs.



Volume $= \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$

Exemple 4. Calculer le volume du parallélépipède défini $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$.

Théorème 4. Le produit mixte de $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}r\\s\\t\end{pmatrix}$ est donné par
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (yz' - yz')r + (zx' - z'x)s + (xy' - x'y)t$

Propriété 3. Soient $\vec{a}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs, λ et μ des nombres réels.

$[\lambda\vec{a} + \mu\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda[\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] + \mu[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

$[\vec{u}, \lambda\vec{a} + \mu\vec{v}, \vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{a}, \vec{w}] + \mu[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ **Trilinéarité**

$[\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{a} + \mu\vec{w}] = \lambda[\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}] + \mu[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$ **Antisymétrie**

Théorème 5. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

Exemple 5. Pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1-m\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1+m\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-m\\3\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

5 Plans, droites et sphères

Définition 7. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

On appelle **plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et on note $\text{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ l'ensemble des vecteurs coplanaires avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\text{Vect}(\vec{u},\vec{v}) = \{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}.$$

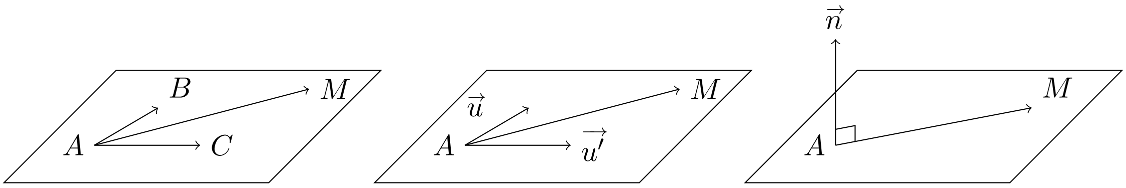
Soit A un point de l'espace. On appelle **plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$** l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient coplanaires. Ce plan est noté $P = A + \text{Vect}(\vec{u},\vec{v})$.

Théorème 6. Équation d'un plan

Le plan défini par $A(x_A, y_A, z_A)$ et les vecteurs non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$, appelés vecteurs directeurs du plan, admet pour équation

- $\left[\vec{u},\vec{u'},\overrightarrow{AM}\right]=0$ **Équation cartésienne**
- $\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$, $t, t' \in \mathbb{R}$ **Représentation paramétrique**

Le plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ admet pour équation cartésienne $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$



Exemple 6. Soit $A(1, 0, 1)$. Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan passant par A, de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

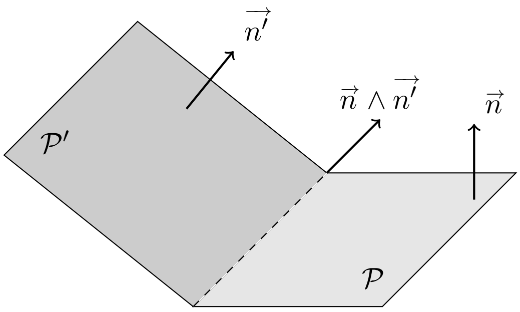
Théorème 7. Équation d'une droite

La droite passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ admet pour

représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$

La droite intersection des plans non parallèles $\mathcal{P} : ax + by + cz = d$ de vecteur normal $\vec{n}$, et $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z = d'$ de vecteur normal $\overrightarrow{n'}$, admet pour équation

- $\left\{\begin{array}{ll} ax + by + cz & = d \\ a'x + b'y + c'z & = d' \end{array}\right.$ **Système d'équations cartésiennes**
- $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$, où $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$ et (x_A, y_A, z_A) les coordonnées d'un point de la droite. **Représentation paramétrique**



Exemple 7.

1. Soit la droite $\mathcal{D}$ de système d'équations cartésiennes
$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z - 2 & = & 0 \\ 3y - z + 2 & = & 0 \end{array}\right.$
   a) Donner un point et un vecteur directeur de D.
   b) Donner une représentation paramétrique de D.
2. Soit la droite Δ de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\lambda \\ y & = & -1 + \lambda, \\ z & = & 1 - \lambda \end{array}\right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$
   Donner un système d'équations cartésiennes de Δ.

Théorème 8. Distance d'un point à un plan

Si H est le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ alors la distance du point M au plan $\mathcal{P}$ est

$$HM = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemple 8. Soient P le plan d'équation $x + 2y + z - 1 = 0$ et A le point de coordonnées (1,1,0). Trouver le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$.

Théorème 9. Distance d'un point à une droite
Soient D la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point de l'espace.

$$\mathrm{d}(M, D) = \frac{|| \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} ||}{|| \vec{u} ||}$$

Exemple 9. Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point M $(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ sur la droite $D \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & -2+t \\ z & = & t \end{array} \right.$

Théorème 10. Équation d'une sphère
Une équation de la sphère de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon R est

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

Exemple 10. 1. Caractériser l'ensemble d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y - 4z = \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. On note $\mathcal{C}$ l'intersection de la sphère de centre $\Omega(0, 1, -1)$ et de rayon 2 avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = x + y - 1$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on donnera le rayon.

Proposition 1. Sphère définie par un diamètre
Soient A et B deux points distincts. La sphère de diamètre $[AB]$ est $\{M\ /\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\}$.