Géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé direct.

Exercice 1 Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $B' = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace. Est-elle directe ?
2. Soit $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\m\end{pmatrix}$ où m est un paramètre réel.
   (a) Exprimer les composantes du vecteur $\vec{t}$ dans la base B'.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 2 Soient A, B et C trois points de l'espace deux à deux distincts.
Montrer que, quelque soit le point M de l'espace,

$$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$$

Exercice 3 Soient P le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z+4=0$ et $A(0;1;2), B(-1;0;1), C(1;1;1)$ trois points de l'espace.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne du plan P' passant par ces trois points.
2. Montrer que les plans P et P' sont sécants selon une droite D dont on donnera une représentation paramétrique.

Exercice 4

1. Trouver deux vecteurs non colinéaires du plan P d'équation cartésienne $2x-y+3z-1=0$, puis donner un système d'équations paramétriques de ce plan.
2. Trouver un vecteur directeur, puis une représentation paramétrique, de la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases}2x+y-4z=6\\x-y+3z=2\end{cases}$

Exercice 5

1. Soit la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases}x=y+1\\z=y\end{cases}$
   Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à (D) et passant par $A(1,1,1)$.

2. Calculer la distance du point $A(1,1,4)$ au plan P d'équation cartésienne $x-y+2z=2$, puis déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan P.

Exercice 6 Calculer la distance du point A à la droite (D) dans les deux cas suivants :

1. $A(4,-3,2)$, (D) passe par $B(1,0,-1)$ et est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.
2. $A(2,-1,1)$ et (D) est définie par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x=2z-1 \\ y=3z+1 \end{cases}$

Exercice 7 On considère la droite Δ, passant par le point A dirigée par le vecteur $\vec{u}$, et la droite Δ', passant par le point B dirigée par le vecteur $\vec{v}$.
On suppose que les droites Δ et Δ' ne sont pas parallèles.

1. Montrer que la distance entre les droites Δ et Δ' est

$$\frac{|\,[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}]\,|}{||\vec{u}\wedge\vec{v}||}$$

2. Application : Déterminer la distance entre les droites (Δ) et $(\Delta)'$ définies par les équations :

$$(\Delta)\ \begin{cases} x-y+z &= 3 \\ x+z &= 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\Delta')\ \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ y+z &= 2 \end{cases}$$

Exercice 8

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A(-1,1,0)$ et $B(2,0,1)$, parallèle à la droite (D) définie par les équations $\begin{cases} x-y+z+3=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}$
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant la droite (D) et parallèle à la droite (D') avec $(D)\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}, \\ z=3\lambda \end{cases}$ et $(D')\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

Exercice 9 Montrer que les droites D et D' suivantes sont coplanaires et donner une équation cartésienne du plan qui les contient où

$$D : \begin{cases} x=2z+1 \\ y=z-1 \end{cases} \quad \text{et } D' : \begin{cases} x=z+2 \\ y=3z-3 \end{cases}$$

Exercice 10 Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble P_m par son équation cartésienne

$$(4+m^2)x + (4-m^2)y - 4mz = m+8.$$

On note Ω le point de coordonnées $(0;1;-\frac{1}{4})$ et D la droite passant par Ω et dirigée par $\vec{i}$.

1. Justifier que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble P_m est un plan.
2. Soit Ω_x le point de la droite D dont la première coordonnée vaut x.
   Montrer que la distance entre Ω_x et P_m est égale à $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{2}}$
3. Déterminer toutes les sphères de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dont le centre appartient à D et telles que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m soit tangent à ces sphères.
   On notera S_1 celle dont le centre a la première coordonnée la plus petite. Déterminer le centre et une équation cartésienne de S_1.

Exercice 11 On considère le plan P d'équation $x+2y-z+1=0$, P' le plan de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ passant par le point $A(2;0;0)$.

1. Montrer que l'intersection D des plan P et P' est une droite dont on donnera une représentation paramétrique.
2. Pour tout réel m, on note P_m l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $(1+m)x + (2-m)y + (-1+2m)z + 1 - 2m = 0$.
   (a) Justifier que, pour tout réel m, l'ensemble P_m est un plan.
   (b) Montrer que la droite D est incluse dans P_m, pour tout réel m.
   (c) En déduire un vecteur directeur de P_m puis en déterminer un autre.
   (d) Existe-t-il un plan P_m qui soit perpendiculaire au plan P ?
3. On considère l'ensemble S des points $M(x;y;z)$ vérifiant $x^2+y^2+z^2+2x-4y=0$.
   (a) Déterminer la nature de l'ensemble S.
   (b) Montrer que $C = P_{\frac{1}{2}} \cap S$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon r.
   (c) Après avoir vérifié que $O \in C$, déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite tangente au cercle C en O.