Correction du devoir surveillé n° 4

Exercice 1

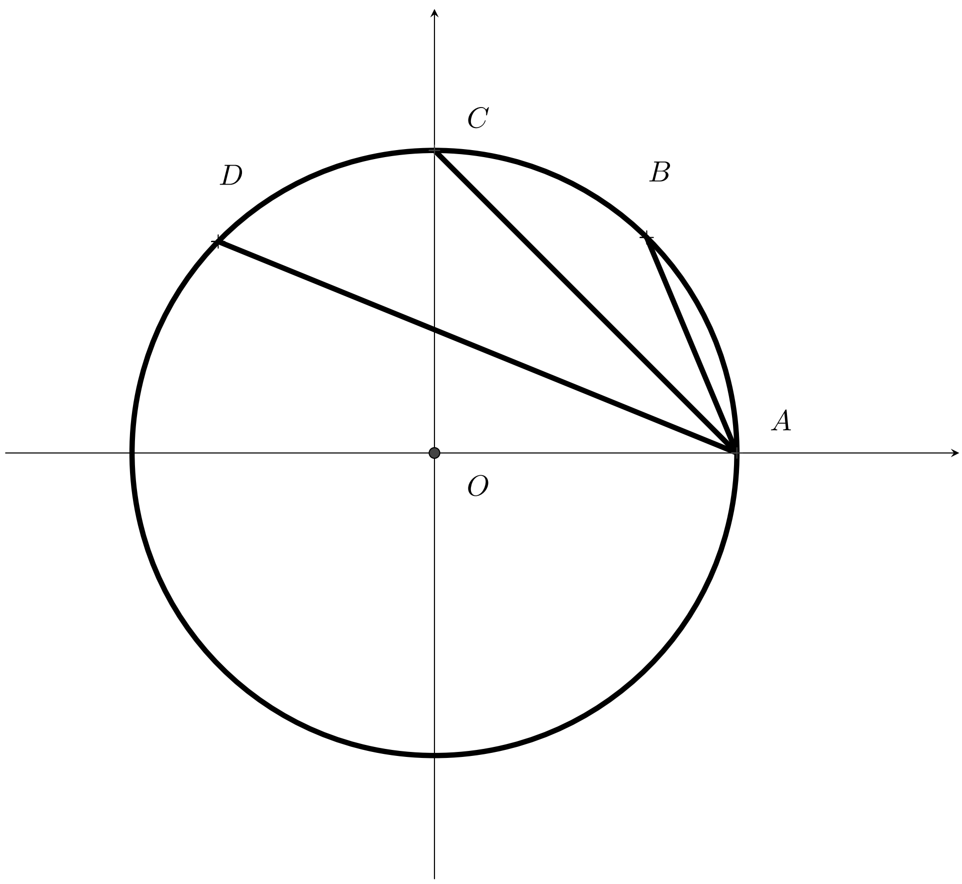
1. Pour $n = 4$, on a $a_4^0 = 1, a_4^2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ et $a_4^3 = e^{\frac{3i\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc la somme demandée est égale à $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1 + i(1+\sqrt{2})$. Or
$$\frac{2}{1-a_4} = \frac{2}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{2-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{4(2-\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})^2+2} = \frac{4(2-\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{8-4\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$
Et $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$, donc $\dfrac{2}{1-a} = \dfrac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) + i\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2} = 1 + i(\sqrt{2}+1)$, ce qui est bien la valeur obtenue plus haut.

2. On peut bien sûr effectuer le calcul beaucoup plus rapidement en exploitant une somme géométrique : $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_n^k = \frac{1-a_n^n}{1-a_n}$, car $a_n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Or $a_n^n = e^{i\pi} = -1$, et la formule en découle.

3. Puisque $a_n^k = e^{\frac{ki\pi}{n}} = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, les deux sommes qu'on cherche à calculer dans cette question sont la partie réelle et la partie imaginaire de la somme calculée à la question précédente.
On écrit A_n sous forme algébrique :
$$A_n = \frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}} = \frac{2}{e^{\frac{i\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)} = \frac{2}{-2ie^{\frac{i\pi}{2n}}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{ie^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1 + \frac{i}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$
On en déduit donc que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

4. (a) $\left|a_n^k - 1\right|^2 = \left|e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1\right|^2 = \left|e^{i\frac{k\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}}\right)\right|^2 = \left|2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n}}\right|^2 = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$
Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_n^k - 1\right|^2 = 2\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 2\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = 2n-2$

   (b) Pour $n = 4$, si on note A(1), B$\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)$ C(i) et D$\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)$ on obtient
$AB^2 + AC^2 + AD^2 = 2*4-2 = 6$ en appliquant le théorème de Pythagore
En effet $AB^2 = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} = 2 - \sqrt{2}$
$AC^2 = 2$ et $AD^2 = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} = 2 + \sqrt{2}$



Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}$ existe ssi $\dfrac{x}{x-1} > 0 \iff x < 0$ ou $x > 1$.

   Comme la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et ln est définie sur $]0;+\infty[$,

   $$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathcal{D}_f =]-\infty;0[\cup]1;+\infty[}.$$

2. Sur $]-\infty;0[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ est continue (comme fonction rationnelle continue sur son ensemble de définition) à valeurs dans $]0;+\infty[$. Comme la fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ est continue sur $]-\infty;0[$ comme composée de fonctions continues. Comme les fonctions exp et $x \mapsto x-1$ sont continues sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto (x-1)\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ est continue sur $]-\infty;0[$ comme produit de fonctions continues et f est continue sur $]-\infty;0[$ comme composée de fonctions continues.

   On montre, de même, que f est continue sur $]1;+\infty[$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition}}$.

3. (a) $\forall x > 1$, $(x-1)\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = (x-1)\ln(x) - (x-1)\ln(x-1)$.

   $(x-1)\ln(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$, par opérations sur les limites.

$x-1 \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} 0^+$ et $y\ln(y) \underset{y \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparée.

Donc $(x-1)\ln(x-1) \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} 0$, par composition.

Donc $f(x) \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} 1$ par opérations sur les limites et par composition.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité (à droite) en } 1}$.

(b) $\dfrac{x}{x-1} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 0^+$ donc $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$, par composition.

Par opérations sur les limites et par composition, on obtient :

$(x-1)\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$ puis $f(x) \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité (à gauche) en } 0}$.

4. $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}$ et $(x-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}}$.

Or $\dfrac{1}{x-1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{\ln(1+y)}{y} \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 1$.

Donc, par composition, on a $(x-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, puis $\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}}$.

On montre, de même, que $\boxed{f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}}$.

Exercice 3

1. **Étude de f :**

(a) $f(0) = 0$ donc 0 est un point fixe de f. Si $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, alors on a :

$$f(x) = x \iff \frac{x}{\ln(x)} = x \underset{\ln(x)\neq 0}{\iff} x = x\ln(x) \underset{x \neq 0}{\iff} 1 = \ln(x) \iff x = \mathrm{e}.$$

Donc $\boxed{\text{l'ensemble des points fixes de } f \text{ est } \{0, \mathrm{e}\}}$.

(b) $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathcal{D}\backslash\{0\}}$, par les théorèmes généraux.

Si $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$ alors $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 = f(0)$, par opérations sur les limites.

Donc f est continue en 0 et sur $\mathcal{D}\backslash\{0\}$, donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathcal{D}}$.

(c) Pour $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}} \text{ et } f''(x) = \frac{\ln^2(x) - 2\ln(x)(\ln(x)-1)}{x\ln^4(x)} \boxed{= \frac{\ln(x)(2-\ln(x))}{x\ln^4(x)}}.$$

(d) f est continue sur $\mathcal{D}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{D}\backslash\{0\}$ (car de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{D}\backslash\{0\}$).

De plus, si $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln^2(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

par opérations sur les limites. Donc, par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0, $f'(0) = 0$ et f' est continue en 0.

Donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathcal{D} \text{ et } f'(0) = 0}$.

(e) Si $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, on a :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{\ln(x) - 1}{x\ln^2(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty,$$

par croissance comparée et opérations sur les limites, car $x\ln^2(x) > 0$.

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas deux fois dérivable en } 0}$.

(f) Par opérations sur les limites, en $1^{\pm}$, on a :

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -\infty}, \quad \boxed{f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty} \text{ et } \boxed{f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} \underset{x\to 1^{\pm}}{\longrightarrow} -\infty}.$$

Par croissance comparée, en $+\infty$, on a : $\boxed{f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

Par opérations sur les limites, en $+\infty$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln^2(x)} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0}$.

(g) Pour $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, $\ln^2(x) > 0$ donc $f'(x) > 0 \iff \ln(x) - 1 > 0 \iff x > \mathrm{e}$. D'où

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ ↘	e	↗	$+\infty$

Pour $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, $x\ln^4(x) > 0$ donc

$$f''(x) > 0 \iff \ln(x)(2 - \ln(x)) > 0 \iff 0 < \ln(x) < 2 \iff 1 < x < \mathrm{e}^2. \text{ D'où}$$

x	0		1		e2		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

(h) D'après le tableau de variation de f, $\forall x \geq \mathrm{e}$, $f(x) \geq f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$.

Donc $\boxed{f([\mathrm{e}, +\infty[) \subset [\mathrm{e}, +\infty[}$.

D'après le tableau de variation de f', si $\mathrm{e} \leq x \leq \mathrm{e}^2$ alors
$0 = f'(\mathrm{e}) \leq f'(x) \leq f'(\mathrm{e}^2) = \dfrac{1}{4}$ et si $x > \mathrm{e}^2$ alors $0 < f'(x) < \dfrac{1}{4}$.

Donc $\forall x \in [\mathrm{e}, +\infty[$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$ et, par l'inégalité des accroissements finis,

$\boxed{\forall (x, x') \in [\mathrm{e}, +\infty[^2, \ \ |f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{4}|x - x'|.}$

2. **Étude de (u_n) :**

(a) $u_0 = 3 \geq \mathrm{e}$ et si $u_n \geq \mathrm{e}$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq \mathrm{e}$, d'après 1. (h).

Donc, par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n \geq \mathrm{e}}$.

(b) Comme $\forall (x, x') \in [\mathrm{e}, +\infty[^2, \ \ |f(x) - f(x')| \leq \dfrac{1}{4}|x - x'|.$ et $u_n \geq \mathrm{e}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \ |u_{n+1} - \mathrm{e}| = |f(u_n) - f(\mathrm{e})| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|}$.

(c) (initialisation) : $|u_0 - \mathrm{e}| = |3 - \mathrm{e}| \leq 1 = \dfrac{1}{4^0}$.

(hérédité) : Si $|u_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4^n}$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ (HR), alors on a :

$$|u_{n+1} - \mathrm{e}| \underset{2.(b)}{\leq} \frac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}| \underset{(HR)}{\leq} \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}, \quad \text{car tout est positif.}$$

(conclusion) : Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \ |u_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4^n}}$.

(d) On cherche un entier p tel que $|u_p - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4^p} \leq 10^{-6}$:

$$\frac{1}{4^p} \leq \frac{1}{10^6} \iff 4^p \geq 10^6 \underset{\ln \nearrow}{\iff} p\ln(4) \geq 6\ln(10) \underset{\ln(4)>0}{\iff} p \geq \frac{6\ln(10)}{\ln(4)}.$$

$p = \left\lfloor \dfrac{6\ln(10)}{\ln(4)} \right\rfloor + 1 = 10$ convient et $\boxed{u_{10} \text{ est une valeur approchée de e à } 10^{-6} \text{ près}}$.