Samedi 3 février 2024

Devoir surveillé n° 4

Exercice 1 **5,5 points** : **1.** 0.5 **2.** 0.5 **3.** 1.5 **4. (a)** 1 **4. (b)** 1

Soit n un entier naturel non nul. On note $a_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$ et $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_n^k$

1. Calculer A_4 sous forme algébrique et vérifier que cette somme est égale à $\dfrac{2}{1-a_4}$
2. Montrer que $A_n = \dfrac{2}{1-a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|a_n^k - 1\right|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Retrouver géométriquement ce résultat pour $n = 4$.

Exercice 2 **4 points** : **1.** 0.5 **2.** 1 **3.(a)** 1 **3. (b)** 0.5 **4.** 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x-1}$

1. Montrer que f est définie sur $\mathscr{D}_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
3. (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.

   (b) L'est-elle aussi en 0 ? Justifier soigneusement la réponse.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   Donner, sans justification, sa limite en $-\infty$.

Exercice 3 **10,5 points** : **1.(a)** 0.5 **1.(b)** 0.5 **1.(c)** 1 **1.(d)** 1 **1.(e)** 0.5 **1.(f)** 1.5 **1.(g)** 2 **1.(h)** 1 **2.(a)** 0.5 **2.(b)** 0.5 **2.(c)** 1 **2.(d)** 0.5

Pour $x \in \mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$, on pose $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & \text{sinon} \end{cases}$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **Étude de f :**

   (a) Déterminer l'ensemble des points fixes de f (solutions de l'équation $f(x) = x$ dans $\mathcal{D}$).

   (b) Montrer que f est continue sur chaque intervalle de $\mathcal{D}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur chaque intervalle de $\mathcal{D}\backslash\{0\}$.

   (c) Pour $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

   (d) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur chaque intervalle de $\mathcal{D}$.

   (e) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

   (f) Calculer les limites de f et f' en 1^-, 1^+ et $+\infty$.

   (g) Dresser les tableaux de variations de f et de f'.

   (h) En déduire que $f([\mathrm{e}, +\infty[) \subset [\mathrm{e}, +\infty[$ et que

   $$\forall (x, x') \in [\mathrm{e}, +\infty[^2,\ \ |f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{4}|x - x'|.$$

2. **Étude de (u_n) :**

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \mathrm{e}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|$.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ |u_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

   (d) En déduire un entier p tel que u_p est une valeur approchée de e à 10^{-6} près.