Espaces vectoriels

Exercice 1 Les ensembles suivants sont-ils sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\mathbb{R}^n$?

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geqslant 0\right\}$
2. $B = \{(a, a+1),\ a \in \mathbb{R}\}$
3. $C = \left\{(a+b-c, 2b+c),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$
4. $D = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - t = 0 \text{ et } 2y + 3z = 0 \text{ et } y - z = 0\right\}$

Exercice 2 Les ensembles suivants sont-ils sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel usuel ?

1. $A = \left\{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \ / \ f'' + f' + f = 0\right\}$, $B = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f(0) = 0\right\}$ et $C = A \cap B$
2. $A = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\right\}$, $B = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ u_n \to 0\right\}$ et $C = A \cap B$
3. $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P = 0 \text{ ou } \deg(P) = 3\}$, $B = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ XP' - 2P = 0\}$ et $C = A \cap B$

Exercice 3 On considère un sous espace vectoriel E et deux sous espaces vectoriels de E, notés F et G.

Montrer que $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 4 La famille de vecteurs $\mathscr{F}$ est-elle libre ou liée si :

1. $\mathscr{F} = (u,v)$ avec $u = (1,-1)$ et $v = (-2,2)$?
2. $\mathscr{F} = (u,v)$ avec $u = (1,-1)$ et $v = (-1,2)$?
3. $\mathscr{F} = (u,v,w)$ avec $u = (1,-1)$, $v = (-1,2)$ et $w = (3,0)$?
4. $\mathscr{F} = (u,v,w)$ avec $u = (1,-1,0)$, $v = (1,-2,1)$ et $w = (0,1,1)$?
5. $\mathscr{F} = (u,v,w)$ avec $u = (1,1,2)$, $v = (1,0,1)$ et $w = (0,1,1)$?

Exercice 5

1. (a) Donner les coordonnées de $u = (1, 0, -1, 0)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Donner les coordonner de $P = aX^3 + bX$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, dans la base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$.

2. (a) Soient $u = (1, -3)$ et $v = (2, 1)$. Montrer que $\mathscr{B} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Quelles sont les coordonnées d'un vecteur $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans cette base ?

3. (a) Soient $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$. Montrer que $\mathscr{B} = (u, v)$ est une base de $F = \text{Vect}(u, v)$.

   (b) Le vecteur $w = (1, 4, 7)$ est-il dans F ? Si oui, déterminer ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 6 On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, m)$, $u_2 = (1, m, 1)$ et $u_3 = (m, 1, 1)$, $m \in \mathbb{R}$ étant un paramètre.
On note $\mathcal{H}$ la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) et $H = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\mathcal{H}$ est libre.

2. Pour cette question, on suppose que $m = 1$.

   (a) Donner une base de H.

   (b) Donner un système d'équations cartésiennes de H.

3. Pour cette question, on suppose que $m = -2$.

   (a) Déterminer une base $\mathscr{B}$ de H.

   (b) Décrire H à l'aide d'une équation cartésienne.

   (c) Trouver un vecteur v tel que la famille $\mathscr{B} \cup \{v\}$ soit une base de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ puis déterminer une base de F.

Exercice 8 Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, et $\mathscr{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ la famille de fonctions définies par $\varphi_k(t) = \mathrm{e}^{\alpha_k t}$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{F}$ est libre.

2. Est-elle une base de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$?

Exercice 9 Dans chaque cas, montrer que E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 2 :

1. $E = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \ / \ 2f'' + f' + f = 0\}$
2. $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0\}$
3. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(1) = P(2) = 0\}$

Exercice 10 Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

On considère les fonctions $\varphi_k : t \mapsto \mathrm{e}\alpha_k t$, $k \in [\![1, n]\!]$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{F} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre.
2. Montrer que $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 11 On considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + z - t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = y\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que $\dim(F \cap G) = 2$ et déterminer une base $\mathscr{B}$ de $F \cap G$.
3. Compléter $\mathscr{B}$ pour obtenir une base de F.
4. Compléter $\mathscr{B}$ pour obtenir une base de G.
5. Déduire de ce qui précède une base de $\mathbb{R}^4$ contenant les vecteurs de $\mathscr{B}$.

Exercice 12 Dans chaque cas, déterminer le rang de la famille de vecteurs $\mathscr{F}$:

1. $\mathscr{F} = (u, v, w, x)$, où $u = (-1, -1, -1)$, $v = (1, 1, 0)$, $w = (3, 3, -1)$ et $x = (-6, -6, 2)$;
2. $\mathscr{F} = (P, Q, R)$, où $P = X^2 - 1$, $Q = X^2 + 1$ et $R = X^2$.

Exercice 13 Soit un entier $n \geq 2$. Pour tout n-uplet $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de réels deux à deux disjoints, on considère la famille de polynômes définis par

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P_k = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

1. Cas général :
   (a) Calculer $P_k(a_j)$ pour tout $(j, k) \in [\![1, n]\!]^2$.
   (b) Montrer que la famille de polynômes $\mathscr{B} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (c) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.

2. Cas particulier :

   Trouver un polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = -1$ et $P(3) = -2$.

Exercice 14 On considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(a, a, a, a),\ a \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, dont on déterminera une base et la dimension.
2. Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, dont on déterminera une base et la dimension.
3. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 15 Dans chaque cas, montrer que F est un s.e.v. d'un e.v. E de dimension finie, puis déterminer un supplémentaire de F dans E :

1. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X];\ P(1) = P'(1) = 0\}$;
2. F est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, triangulaires supérieures, et à coefficients réels.
3. $F = \mathrm{Vect}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, où $a_1 = (3, 0, 4, 1)$, $a_2 = (0, 1, 2, 1)$, $a_3 = (-5, 0, -2, 3)$

   et $a_4 = (2, 1, 2, -1)$.

Exercice 16 On considère l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et on note $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{I}$) l'ensemble des fonctions réelles paires (resp. impaires).

1. Montrer que $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.
2. En déduire que la fonction exp s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, à déterminer.