Dénombrement

1 Cardinal d'un ensemble fini et bijection

1.1 Notion de cardinal

Définition 1. Un ensemble E est dit **fini** s'il contient un nombre fini d'éléments.
Dans ce cas, on appelle **cardinal** de E le nombre de ses éléments.

Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$ ou $|E|$. Par convention, $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Exemple 1. Donner le cardinal de E si :

a) $E = \{\omega\}$ b) $E = [\![p, n]\!]$, où $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ et $p < n$ c) $E = [\![1, 2]\!] \times [\![1, 3]\!]$

Remarque : E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ ssi on peut écrire $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Propriété 1. Si E est un ensemble fini et A une partie de E ($A \subset E$) alors

1. A est fini et $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$.
2. $A = E$ ssi $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$.

1.2 Bijection entre ensembles finis

Propriété 2. Soient E et F deux ensembles finis, et f une application de E dans F.

1. Si $f : E \to F$ est injective alors $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$.
2. Si $f : E \to F$ est surjective alors $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.
3. Si $f : E \to F$ est bijective alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Propriété 3. Soient E et F deux ensembles finis, et $f : E \to F$ une application.

Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ alors

(i) $f : E \to F$ est bijective ssi (ii) $f : E \to F$ est injective ssi (iii) $f : E \to F$ est surjective

2 Opérations ensemblistes et cardinaux

2.1 Cardinal d'une réunion

Propriété 4. Soit E un ensemble fini, et A, B deux parties de E.

1. $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.
2. Si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$) alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
3. Dans tous les cas, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

Remarque : On peut parfois utiliser cette dernière formule pour calculer le cardinal de $A \cap B$:

$$\text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cup B).$$

Exemple 2. Soit $E \subset \mathbb{N}$, un ensemble à treize éléments qui sont des multiples de 2 ou de 3.

On sait qu'il y a cinq multiples de 3, et deux de 6. Dénombrer les multiples de 2 dans E.

Propriété 5. Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles finis et disjoints deux à deux alors

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(E_i).$$

2.2 Cardinal d'un produit cartésien

Propriété 6. Si E et F sont deux ensembles finis alors $E \times F$ est fini et
$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Exemple 3. Combien existe-t-il de codes formés d'une lettre puis d'un chiffre ?

Propriété 7. Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles finis, alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est fini et

$$\text{Card}\left(E_1 \times \cdots \times E_n\right) = \text{Card}(E_1) \times \cdots \times \text{Card}(E_n).$$

Modèle de tirages successifs dans des urnes différentes : Si on tire successivement un élément dans l'urne E_1 contenant n_1 éléments, un élément dans E_2 à n_2 éléments, ..., un élément dans E_p à n_p éléments, alors il y a $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ tirages possibles (principe multiplicatif).

Exemple 4. Déterminer le nombre des diviseurs (positifs) de 20328.

Propriété 8. Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $\text{Card}(E) = n$ alors $\text{Card}(E^p) = n^p$.
C'est le nombre de ***p*-listes (ou *p*-uplets)** d'éléments de E.

Modèle de tirages successifs avec remise dans une urne : Effectuer p tirages **successifs** avec **remise** dans une urne contenant n éléments, c'est choisir une p-liste d'éléments de cette urne. Il y a donc n^p façons de le faire. L'**ordre** intervient et il peut y avoir **répétition** d'un élément.

Exemple 5. Combien existe-t-il de codes à 4 chiffres ? à 2 lettres ? à 4 chiffres puis 2 lettres ?

2.3 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre

Propriété 9. Si E et F sont deux ensembles finis, et si on note $F^E = \mathscr{F}(E, F)$ alors F^E est fini et $\quad \text{Card}\left(F^E\right) = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}$.

Exemple 6. On lance 5 balles de couleurs différentes dans deux paniers, chaque panier pouvant accueillir toutes les balles. Combien y a-t-il de façons de n'avoir aucun panier vide ?

Propriété 10. Si E est un ensemble fini, et si on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\quad \text{Card}\left(\mathscr{P}(E)\right) = 2^{\text{Card}(E)}$.

Exemple 7. Déterminer le nombre de parties de l'ensemble E :

a) $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ $\qquad$ b) $E = [\![1, n]\!]^p$

3 Listes d'éléments distincts et combinaisons

Dans toute cette partie, E est un ensemble fini de cardinal n non nul et $p \in [\![0, n]\!]$.

3.1 p-listes d'éléments distincts d'un ensemble fini

Propriété 11. (et définition) Le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est

$$\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1).$$

Une p-liste d'éléments distincts de E est aussi appelée ***p*-liste sans répétition** de E.

Modèle de tirages successifs sans remise dans une urne : Effectuer p tirages **successifs** et **sans remise** dans une urne contenant n éléments, c'est choisir une p-liste sans répétition d'éléments de cette urne. Il y a donc $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ façons de le faire. Dans ce cas, l'**ordre** intervient et il n'y a **pas de répétition** d'un élément.

Exemple 8. Jouer au tiercé consiste à parier sur les noms des trois premiers chevaux.

Combien y a-t-il de paris possibles pour une course de 15 chevaux ?

Propriété 12. Le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Propriété 13. (et définition) Le nombre de n-listes sans répétition de E est $n!$.

Une n-liste sans répétition d'un ensemble E à n éléments est appelée **permutation** de E.

Exemple 9. Dénombrer les façons d'assoir 8 convives autour d'une table.

Remarque : Définir une permutation de E, c'est aussi définir une bijection de E sur E.
Il existe donc $n!$ bijections de E sur E.

Exemple 10. Dénombrer les parties à trois éléments de l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$.

Quel lien existe-t-il entre ce nombre et celui des 3-listes sans répétition d'éléments de E ?

3.2 p-combinaisons d'un ensemble fini

Propriété 14. (et définition) Le nombre de parties de E à p éléments est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}.$$

Une partie de E à p éléments est aussi appelée ***p*-combinaison** d'éléments de E.

Modèle de tirage simultané dans une urne : Tirer **simultanément** p éléments dans une urne qui contient n éléments, c'est choisir une p-combinaison d'éléments de cette urne.
Il y a donc $\binom{n}{p}$ façons de le faire. Dans ce cas, il n'y a **ni ordre, ni répétition**.

Exemple 11. Combien peut-on former de mains de 5 cartes avec un jeu de 32 cartes ?

Quel est le nombre de ces mains qui contiennent :

1. au moins une dame.
2. au moins trois coeurs.
3. exactement deux coeurs et deux dames.

Application : Démonstrations combinatoires des formules de Pascal et du binôme.