

# Dénombrement

**Exercice 1** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dénombrer les termes de  $S_n$  dans chacun des cas suivants :

$$\text{a) } S_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} a_{2k+1} \quad \text{b) } S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} b_{i,j} \quad \text{c) } S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{i,j}$$

**Exercice 2** 1.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois ensembles finis. Montrer que

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C).$$

2. Un lycée compte 900 élèves. Trois langues y sont enseignées : anglais, allemand et espagnol. Tout élève apprend au moins une langue et aucun élève n'apprend trois langues. Il y a 880 élèves qui apprennent l'anglais, 292 qui apprennent l'espagnol et 170 qui apprennent l'allemand. Combien y a-t-il d'élèves qui apprennent deux langues ?

**Exercice 3** L'immatriculation d'un véhicule porte sept caractères : deux lettres, trois chiffres et deux lettres. Les lettres I, O et U ne sont pas utilisées, du fait de leurs ressemblances avec 1, 0 et V. Les séries SS et WW ne sont pas utilisées dans le bloc de gauche et la série SS n'est pas utilisée dans le bloc de droite. Quant à la série de chiffres, elle commence à 001.

Quel est le nombre total d'immatriculations possibles selon ce système ?

**Exercice 4** Un anagramme est une permutation des lettres d'un mot. On ne s'intéresse pas au fait de savoir si un anagramme a un sens, ni même s'il est prononçable.

Combien peut-on écrire d'anagrammes des mots MATHS, MOTO et DODO ?

**Exercice 5**

- On range  $n \geq 3$  balles dans trois paniers, chacun pouvant accueillir toutes les balles. Combien y a-t-il de façons de n'avoir aucun panier vide ?
- On range 20 livres sur une étagère rectiligne. Parmi ces livres, 3 sont de l'auteur A, les autres étant d'auteurs différents. De combien de façons peut-on ranger les livres de A côte à côte ?

**Exercice 6** Soient  $m, n, p$  trois entiers naturels tels que  $p \leq n$  et  $p \leq m$ . Montrer que

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k}.$$

On pourra considérer les parties d'un ensemble  $A \cup B$ , où  $A$  et  $B$  sont disjoints, de cardinaux respectifs  $n$  et  $m$ .

**Exercice 7** Dans une urne, on place  $n$  boules blanches et une noire. On prélève  $k$  boules simultanément.

- Quel est le nombre de tirages possibles sans boule noire ?

2. Quel est le nombre total de tirages possibles ?
3. Déterminer de deux façons différentes le nombre de tirages avec au moins une boule noire. Quelle propriété du cours vient-on de retrouver ?

**Exercice 8** On dispose de  $n$  boules noires numérotées de 1 à  $n$  et de  $n$  boules rouges numérotées de 1 à  $n$  que l'on place dans une urne.

1. On note  $E$  l'ensemble des tirages simultanés de  $n$  boules dans l'urne. Déterminer  $\text{Card}(E)$ .
2. Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . On note  $A_k$  l'ensemble des tirages de  $E$  avec exactement  $k$  boules noires. Calculer  $\text{Card}(A_k)$
3. Calculer alors de deux façons différentes le nombre :  $\text{Card}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$ .

**Exercice 9** On lance trois dés à six faces, discernables (par exemple de trois couleurs différentes).

1. Quel est le nombre total de tirages ?
2. Quel est le nombre de tirages avec exactement trois numéros différents ?
3. Quel est le nombre de tirages avec au moins deux numéros identiques ?
4. Quel est le nombre de tirages contenant au moins un six ?
5. Quel est le nombre de tirages tels que la somme des trois numéros tirés soit paire ?

**Exercice 10** Une urne contient cinq boules rouges numérotées de 1 à 5, et quatre vertes numérotées de 1 à 4.

1. On tire successivement et sans remise trois boules. Combien y a-t-il de tirages :
  - (a) au total ?
  - (b) bicolores ?
  - (c) contenant au plus deux boules rouges ?
  - (d) contenant exactement une boule rouge et une boule portant le numéro 3 ?
2. Mêmes questions pour des tirages successifs de trois boules avec remise.
3. Mêmes questions pour un tirage simultané de trois boules.

**Exercice 11** Au poker classique, qui se joue avec un jeu de 52 cartes, une suite est une main où les cinq cartes se suivent, une couleur est une main où les cinq cartes sont de la même couleur, un full est une main avec un brelan et une paire, et une quinte flush est une suite où les cinq cartes sont de la même couleur.

On considèrera que l'as peut compter dans deux suites : as, deux, trois, quatre, cinq et dix, valet, dame, roi, as. Déterminer le nombre de mains de cinq cartes contenant exactement :

1. une suite
2. une couleur
3. un full
4. une quinte flush.

**Exercice 12**

1. Déterminer le nombre de surjections de  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le nombre de surjections de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .