Devoir maison n° 15

A rendre le jeudi 22 février 2024

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Exercice 1 Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble P_m par son équation cartésienne

$$(4+m^2)x + (4-m^2)y - 4mz = m+8.$$

On note Ω le point de coordonnées $(0;1;-\dfrac{1}{4})$ et D la droite passant par Ω et dirigée par $\vec{i}$.

1. Justifier que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble P_m est un plan.
2. Soit Ω_x le point de la droite D dont la première coordonnée vaut x.
   Montrer que la distance entre Ω_x et P_m est égale à $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{2}}$
3. Déterminer toutes les sphères de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dont le centre appartient à D et telles que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m soit tangent à ces sphères.
   On notera S_1 celle dont le centre a la première coordonnée la plus petite. Déterminer le centre et une équation cartésienne de S_1.

Exercice 2 On considère le plan P d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$, P' le plan de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ passant par le point $A(2;0;0)$.

1. Montrer que l'intersection D des plan P et P' est une droite dont on donnera une représentation paramétrique.
2. Pour tout réel m, on note P_m l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $(1+m)x + (2-m)y + (-1+2m)z + 1 - 2m = 0$.
   (a) Justifier que, pour tout réel m, l'ensemble P_m est un plan.
   (b) Montrer que la droite D est incluse dans P_m, pour tout réel m.
   (c) En déduire un vecteur directeur de P_m puis en déterminer un autre.
   (d) Existe-t-il un plan P_m qui soit perpendiculaire au plan P ?
3. On considère l'ensemble S des points $M(x;y;z)$ vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 0$.
   (a) Déterminer la nature de l'ensemble S.
   (b) Montrer que $C = P_{\frac{1}{2}} \cap S$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon r.
   (c) Après avoir vérifié que $O \in C$, déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite tangente au cercle C en O.