Devoir maison n° 16

A rendre le jeudi 14 mars 2024

Exercice 1 L'objectif est de déterminer, par analyse-synthèse, l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$(E): \quad P(X) = P'(X)P''(X).$$

1. (Analyse) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant l'équation (E).

   (a) Déterminer le degré de P.

   (b) Déterminer le coefficient dominant de P.

   (c) Justifier que le polynôme P' admet une racine α dans $\mathbb{C}$. Montrer que $P(\alpha) = 0$.

   (d) En dérivant chacun des membres de l'égalité (E), montrer que $P''(\alpha) = 0$.

   (e) Déduire de tout ce qui précède, la factorisation de P en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

2. (Synthèse) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2 On note $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à deux, et $\mathbb{R}_1[X]$ celui des polynômes de degré inférieur ou égal à un.

1. On considère l'ensemble $E = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] / \ P(-1) = P'(-1) = 0\right\}$.

   Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, puis déterminer une base et la dimension de E.

2. On considère la famille de polynômes $\mathscr{B}' = (X^2, (X+1)^2, (X+2)^2)$.

   (a) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Exprimer les polynômes 1 et X comme combinaisons linéaires des polynômes de $\mathscr{B}'$.

   (c) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

   Déterminer, en fonction de a, b et c, la matrice colonne des coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}'$.