Correction du Test n° 15

1. Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

   (a) Le début du développement de $(X+1)^7$ est $X^7 + 7X^6$, d'après la formule du binôme de Newton, ce qui montre que $\deg P = 6$.

   (b) $P(0) = P(-1) = 0$ donc 0 et -1 sont racines de P.

   (c) $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$ car $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \neq 1$ et $j^3 = 1$.

   (d) $P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1$. Or $(j+1)^7 = (-j^2)^7 = -j^{14} = -j^2(j^3)^4 = -j^2$ et $j^7 = jj^6 = j$. On en déduit que $P(j) = -(j^2 + j + 1) = 0$.
   $P'(X) = 7(X+1)^6 - 7X^6$ donc $P'(j) = 7(-j^2)^6 - 7j^6 = 7(j^3)^4 - 7(j^3)^2 = 0$
   Donc j est racine de P avec une multiplicité d'au moins 2.

   (e) Comme $P \in \mathbb{R}[X], \overline{j}$ est également racine de P avec une multiplicité d'au moins 2.
   La multiplicité de j et de $\overline{j}$ dans P est alors exactement de 2, puisque $\deg P = 6$.
   De plus, le coefficient dominant de P est 7 d'après (a).
   $\boxed{\text{On en déduit la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{C}[X] : P = 7X(X+1)(X-j)^2(X-\overline{j})^2}$

On considère les familles de droites $(D_m)_{m\in\mathbb{R}}$ et $(\Delta_m)_{m\in\mathbb{R}}$ définies par les équations :

$$\begin{array}{rl} y = mx & D_m \\ (m+1)x - (1-m)y = 2m & \Delta_m \end{array}$$

(a) Un vecteur directeur de Δ_m est par exemple $\overrightarrow{u_m}(1, m)$, un vecteur directeur de $\mathbb{D}_m$. est par exemple $\overrightarrow{v_m}(1-m, m+1)$

(b) $\overrightarrow{u_m}.\overrightarrow{v_m} = 1 - m + m(m+1) = m^2 + 1$
$\|\overrightarrow{u_m}\| = \sqrt{1+m^2}$ et $\|\overrightarrow{v_m}\| = \sqrt{(1-m)^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2(m^2+1)}$
Donc $\cos(\overrightarrow{u_m}, \overrightarrow{v_m}) = \dfrac{m^2+1}{\sqrt{2}(1+m^2)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
D'où $(\overrightarrow{u_m}, \overrightarrow{v_m}) = \pm\pi/4$.
De plus $[\overrightarrow{u_m}, \overrightarrow{v_m}] = m + 1 - m(1-m) = m^2 + 1$
Donc $\sin(\overrightarrow{u_m}, \overrightarrow{v_m}) = \dfrac{m^2+1}{\sqrt{2}(1+m^2)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
et l'angle (D_m, Δ_m) est bien de $\pi/4$.