Correction Test n° 16

Sujet A

1.

2. Les points $A(1,1,9)$, $B(-1,-1,-1)$, $C(0,-2,0)$ et $D(-2,1,0)$ sont-ils coplanaires ?
$\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-10\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-9\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\vec{}\begin{pmatrix}-12\\-8\\4\end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\0\\-9\end{pmatrix}$
Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=0=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]$
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et les points A, B C et D le sont aussi.

3. On considère le point $A(1,-2,1)$ et la droite (D) définie par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x-2y+z-1=0\\ x+y-2z+2=0\end{cases}$
   (a) (D) est l'intersection du plan $P: x-2y+z-1=0$ dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et du plan $P': x+y-2z+2=0$ dont un vecteur normal est $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.
   Un vecteur directeur de (D) est donc $\vec{n}\wedge\overrightarrow{n'}=\vec{}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$. On peut choisir $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de (D). Le point $B(1,1,2)\in(D)$.
   $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\vec{}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ donc $d(A,(D))=\dfrac{\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AB}\|}{\|\vec{u}\|}=\sqrt{\dfrac{14}{3}}$
   (b) P est orthogonal à la droite (D) donc $\vec{u}$ est un vecteur normal àP.
   $P: x+y+z+d=0$ avec $A\in P$ donc $d=0$ et $P: x+y+z=0$.
   (c) $\begin{cases} x=1+t\\ y=1+t\\ z=2+t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$, est une représentation paramétrique de (D)
   $x+y+z=0\Rightarrow 4+3t=0\Rightarrow t=-\dfrac{4}{3}$ donc $H\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

Sujet B

1.

2. Les points $A(2,1,-3)$, $B(-1,1,-1)$, $C(1,-2,0)$ et $D(-4,1,1)$ sont-ils coplanaires ?
$\vec{AB}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\7\\9\end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix}-6\\0\\4\end{pmatrix}$
Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=0=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et les points A, B C et D le sont aussi.

3. On considère les points $B(1,2,0)$, $D(3,-1,0)$, $E(1,1,4)$ $F(2,3,4)$ et $G(5,2,4)$.

(a) Donner une équation cartésienne du plan (BEG).
$\vec{BE}\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\vec{BG}\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BE}\wedge\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-4\\16\\4\end{pmatrix}$ donc on peut prendre comme vecteur normal au plan (BEG) le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ et $(BEG): -x+4y+z+d=0$ avec $B\in(BEG)$ donc $d=-7$ puis $(BEG): -x+4y+z-7=0$

(b) $\vec{FD}\begin{pmatrix}-1\\4\\4\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$ donc la droite (FD) n'est pas orthogonale au plan (BEG).

(c) $\begin{cases} x=3-t\\ y=-1+4t\\ z=4t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$, est une représentation paramétrique de la droite (FD)
$-x+4y+z-7=0\Rightarrow 21t-14=0\Rightarrow t=\dfrac{2}{3}$ donc $H\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{8}{3}\right)$

(d) $d(F,(BEG)=\dfrac{|-x_F+4y_F+z_F-7|}{\sqrt{1+4^2+1}}=\dfrac{7}{\sqrt{18}}=\dfrac{7}{3\sqrt{2}}$