▷ Révisions ◁

Sommes

1 Calculer pour $n \in \mathbb{N}$:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$. | **2)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{(j+1)3^j}{i(i+1)j}$ | **3)** $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant i\leqslant n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$

Nombres complexes et trigonométrie

2 Résoudre $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.
On justifiera que l'on peut chercher x sous la forme $x = \cos\theta$ avec $\theta \in [\,0\,;\pi\,]$.

3

1) Soit x un réel. Exprimer $\cos(5x)$ comme un polynôme en $\cos x$.

2) En déduire que $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine d'un trinôme du second degré, puis déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ exprimée avec des radicaux.

4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

1) $z^5 = 1 + \mathrm{i}$

2) $z^8 + z^4 + 1 = 0$

3) $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z+1)^2 = 0$

4) $(z+1)^3 - (z-1)^3 = 0$.

Fonctions usuelles, calcul intégral et équations différentielles

5 Déterminer l'ensemble de définition de l'expression $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, puis simplifier l'expression de f par une technique de dérivation.

6

1) Déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2-x+1}$.

2) Réaliser le changement de variable $u = x^2$ dans l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$.

3) Rappeler une factorisation de x^3+1 pour tout réel x et déterminer trois réels a,b,c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \frac{x}{x^3+1} = \frac{ax+b}{x^2-x+1} + \frac{c}{x+1}$$

4) En déduire la valeur de I.

7 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ le problème de Cauchy : $\begin{cases} xy' - 2y = x^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

8 Résoudre $\quad (E) \qquad y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{\,x}\cos(2x)$.

Systèmes linéaires

9 Résoudre le système suivant d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On précisera la nature géométrique de l'ensemble des solutions.

$$\begin{cases} 3x - 6y - 6z + 8t = 2 \\ x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ -2x + 4y + 4z - 5t = 3 \\ 6x - 12y - 12z + 16t = 4 \end{cases}$$

Applications

10 Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \longmapsto (x+y, 2x+y, 3x-y) \end{cases}$.

1) Étudier l'injectivité de f.

2) Déterminer puis représenter graphiquement $f^{-1}((\mathbb{R}_+)^3)$.

3) Déterminer $\operatorname{Im} f$.
La fonction f est-elle surjective ? bijective ?

4) Déterminer $f(D)$ où D est la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $2x + y = 1$.

Suites, limites

11 **1)** Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant

$$u_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = -3u_n + 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La suite (u_n) admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

2) Déterminer l'expression du terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant

$$v_0 = 1,\ v_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad v_{n+2} = 2v_{n+1} + 2v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La suite (v_n) admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, ainsi que $u_n = A_{2n}$ et $v_n = A_{2n+1}$.

1) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2) En déduire que la suite (A_n) converge.

Polynômes

13 Soit $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1) Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2) En déduire une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

14 Soit $P = (1+X)^5 - (1-X)^5$.

1) Développer le polynôme P et montrer que 0 est racine de P.

2) Décomposer P en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Espaces vectoriels

15 Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$ et $F = \{(a,2b-a,b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Montrer que E et F sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera des bases et les dimensions.

2) Montrer que $E \cap F$ est une droite vectorielle.

3) Déterminer une base $\mathscr{B} = (u_1,u_2,u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $u_1 \in E \cap F$, $u_2 \in E$ et $u_3 \in F$.

16 Déterminer le rang de $\mathscr{F} = (u,v,w)$ et déterminer si $\mathscr{F}$ est une base de l'espace $\mathbb{R}^3$:

1) $u = (1,0,1),\ \ v = (-1,2,3),\ \ w = (1,2,5)$

2) $u = (1,0,1),\ \ v = (-1,2,3),\ \ w = (1,2,-1)$

17 Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}$.

Pour les PCSI : si $V \subset E$, on dit que V est un sous-espace vectoriel de E si V contient la fonction nulle et si V est stable par combinaisons linéaires.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit G l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

3) Montrer par analyse-synthèse que, pour toute fonction $h \in E$ il existe un unique couple $(f,g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$. Qu'a-t-on démontré ?

18 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\right\}$ et $G = \text{Vect}\,\{(1,1,1)\}$.

1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3) Décomposer le vecteur $(2,2,3)$ selon ces deux sous-espaces vectoriels.

4) Donner la décomposition d'un vecteur quelconque selon ces deux sous-espaces vectoriels.