Fiche de révision

1 Polynômes

On considère des polynômes A, B, P de $\mathbb{K}_n[X]$.

1) **Forme développée** : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 X^0$

2) **Division euclidienne de A par B** : $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

3) On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P de **multiplicité** $m \in \mathbb{N}^*$ si $(X-\alpha)^m$ divise P et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P.

ssi $P = (X-\alpha)^m Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

ssi pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

4) P est dit **scindé** s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1.

5) Si $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et si α est une racine complexe non réelle de P de multiplicité m, alors $\overline{\alpha}$ aussi.

6) $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** si P est non constant et ses seuls diviseurs sont les polynômes constants non nuls et les λP, où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

7) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

8) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

9) **Formule de Taylor** $\forall a \in \mathbb{K}, \quad P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$

2 Espaces vectoriels

On considère E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{e_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ une famille de vecteurs de E.

1) Soit G un sous ensemble de E. G est un **sous espace vectoriel de E** si

- $G \neq \emptyset$. En particulier $0_E \in G$
- $\forall u, v \in G, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u + \lambda v \in G$

2) $\mathcal{F}$ est une **famille libre** de E si pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

3) $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** de E si $E =$Vect$(e_1, \ldots, e_n)$:

$$\forall u \in E,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \ u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

4) $\mathcal{F}$ est une **base** de E si $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de E

i.e tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$:

$$\forall u \in E,\ \exists! (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Dans ce cas, on dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées (composantes) de u dans la base $\mathcal{F}$.

5) **Bases canoniques**

• de $\mathbb{K}^n$: $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$, où 1 est sa $i$ème composante.

• de $\mathbb{K}_n[X]$: $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$

• de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathscr{B} = (E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $E_{i,j}$ matrice de coefficients tous nuls sauf celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.

6) Le **rang** de $\mathcal{F}$ est défini par : rg $(\mathcal{F}) = \dim\left(\text{Vect}\{e_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}\right)$

On considère F et G deux sev de E.

7) On dit que F et G sont en **somme directe** si $\ \forall w \in F + G,\ \ \exists! (u, v) \in F \times G,\ \ w = u + v.$

ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

8) On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si $\ \forall w \in E,\ \exists! (u, v) \in F \times G,\ w = u + v.$
ssi $E = F \oplus G$

c.à.d. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$

9) **Cas où E est de dimension finie**

• **Formule de Grassmann** $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

• $E = F \oplus G$ ssi $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.