▷ Révisions – corrigés ◁

Sommes

1 Calculer pour $n \in \mathbb{N}$:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$. | **2)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{(j+1)3^j}{i(i+1)j}$ | **3)** $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant i\leqslant n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$

Solution de l'exercice 1

1) **1re solution** Par la formule du capitaine, $\displaystyle\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ donc par changement d'indice $j = k+1$ et formule du binôme :

$$S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}(-(-1+1)^{n+1}+1) = \frac{1}{n+1}$$

2e solution Par la formule du binôme, $\displaystyle(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où $\displaystyle\int (1+x)^n \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int x^k \,\mathrm{d}x + C, C \in \mathbb{R}$ par linéarité. Puis

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1} + C$$

Pour $x = 0$, on obtient $\displaystyle\frac{1}{n+1} = C$ et pour $x = -1$, comme $(-1)^{k+1} = -(-1)^k$ on trouve

$$0 = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{1}{n+1} \text{ puis } S_n = \frac{1}{n+1}$$

2) On calcule avec la réécriture d'une somme triangulaire, un télescopage et une somme géométrique :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{(j+1)3^j}{i(i+1)j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{(j+1)3^j}{i(i+1)j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)}{j}3^j\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i(i+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)}{j}3^j\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)}{j}3^j\left(1-\frac{1}{j+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)}{j}3^j\frac{j}{j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n}3^j \\
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{(j+1)3^j}{i(i+1)j} &= 3\frac{3^n-1}{2}
\end{aligned}$$

3) En utilisant la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k\leqslant i\leqslant n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{k}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i\\ \sum_{0\leqslant k\leqslant i\leqslant n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} &= 3^n\end{aligned}$$

Nombres complexes et trigonométrie

✎ **2** Résoudre $(E)\quad \sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$.
On justifiera que l'on peut chercher x sous la forme $x=\cos\theta$ avec $\theta\in[\,0\,;\pi\,]$.

Solution de l'exercice 2 Cette équation a un sens *ssi* $1-x\geqslant 0$ et $1-x^2\geqslant 0$ donc on résout sur $[\,-1\,;1\,]$. Comme cos réalise une bijection de $[\,0\,;\pi\,]$ sur $[\,-1\,;1\,]$, on pose $x=\cos\theta$ avec $\theta=\operatorname{Arccos} x\in[\,0\,;\pi\,]$ et l'équation devient $\sqrt{1-\cos\theta}=2\cos^2(\theta)-1+2\cos\theta\sqrt{1-\cos^2(\theta)}$ et comme $\sin\theta\geqslant 0$ et $\sin(\theta/2)\geqslant 0$ sur l'intervalle de résolution :

$$\begin{aligned}(E)\quad&\iff\quad \sqrt{2\sin^2(\theta/2)}=\cos(2\theta)+\sin(2\theta)\\ &\iff\quad \sqrt{2}\sin(\theta/2)=\sqrt{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\iff\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\iff\quad \frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\equiv\pm\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\ [2\pi]\end{aligned}$$

- Le cas $2\theta-\dfrac{\pi}{4}\equiv\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$ donne $\theta\equiv\dfrac{3\pi}{10}\ \left[\dfrac{4\pi}{5}\right]$, ce qui ne laisse que $\theta=\dfrac{3\pi}{10}$ vu l'intervalle de résolution.
- Le cas $2\theta-\dfrac{\pi}{4}\equiv-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$ donne $\theta\equiv-\dfrac{\pi}{6}\ \left[\dfrac{4\pi}{3}\right]$, ce qui ne laisse aucune solution dans $[\,0\,;\pi\,]$.

$$\boxed{\text{Finalement } (E) \text{ admet une unique solution } t=\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right).}$$

Remarque : l'exercice suivant permet de dire que $t=\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

✎ **3**

1) Soit x un réel. Exprimer $\cos(5x)$ comme un polynôme en $\cos x$.

2) En déduire que $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine d'un trinôme du second degré, puis déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ exprimée avec des radicaux.

Solution de l'exercice 3

1) La formule de Moivre donne

$$\cos(5x)=\operatorname{Re}\left[e^{5ix}\right]=\operatorname{Re}\left[(\cos x+i\sin x)^5\right].$$

Or, la formule du binôme de Newton permet de calculer

$$\begin{aligned}(\cos x+i\sin x)^5=(\cos x)^5&+5(\cos x)^4(i\sin x)+10(\cos x)^3(i\sin x)^2\\ &+10(\cos x)^2(i\sin x)^3+5(\cos x)(i\sin x)^4+(i\sin x)^5.\end{aligned}$$

Seule la partie réelle de ce qui précède nous intéresse, c'est à-dire les termes où i est à une puissance paire. Ayant $i^2 = -1$ et $i^4 = 1$, on a

$$\begin{aligned}\cos(5x) = \mathrm{Re}\left[e^{5ix}\right] &= \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x \\ &= \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2 \\ &= \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \\ &= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x.\end{aligned}$$

2) Prenons $x = \frac{\pi}{10}$ dans la formule ci-dessus ; on obtient

$$\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\left(16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\right).$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0$, on a

$$16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5 = 0,$$

ce qui montre bien que $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du trinôme $16X^2 - 20X + 5$.
Les racines du trinôme sont :

$$r_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

Or, on a $r_1 < \frac{5-\sqrt{4}}{8} = \frac{3}{8}$. Or, $\cos^2(\frac{\pi}{10}) > \cos^2(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{4}$. Cela impose

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = r_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

3) Une formule de duplication amène :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 1 = \frac{5+\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

✎ **4** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

1) $z^5 = 1 + \mathrm{i}$

2) $z^8 + z^4 + 1 = 0$

3) $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z+1)^2 = 0$

4) $(z+1)^3 - (z-1)^3 = 0$.

Solution de l'exercice 4 1. $z^5 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ On pose $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$z^5 = 1+\mathrm{i} \Leftrightarrow r^5\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 &= 2^{\frac{1}{2}} \\ 5\theta &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r &= 2^{\frac{1}{10}}\sqrt{2} \\ \theta &= \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \quad ,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$S = \left\{2^{\frac{1}{10}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}, k \in [\![0\,;4]\!]\right\}$$

2. $z^8 + z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0$ avec $Z = z^4 \Leftrightarrow Z = \mathrm{j}$ ou $Z = \overline{j} \Leftrightarrow z^4 = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ ou $z^4 = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

$$S = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)}, k \in [\![0\,;3]\!]\right\}$$

3. $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4z + 5)^2 = \mathrm{i}^2(z+1)^2$
$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = \mathrm{i}(z+1)$ ou $z^2 - 4z + 5 = -\mathrm{i}(z+1)$
$\Leftrightarrow z^2 - (4+\mathrm{i})z + 5 - \mathrm{i} = 0$ ou $z^2 + (\mathrm{i}-4)z + 5 + \mathrm{i} = 0$
$\Delta_1 = -5 + 12\mathrm{i} = (x + \mathrm{i}y)^2$ ou $\Delta_2 = \overline{\Delta_1}$

$$\begin{cases} x^2-y^2 &= -5 \\ x^2+y^2 &= 9 \\ 2\mathrm{i}xy &= 12\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= 4 \\ y^2 &= 9 \\ xy &> 0 \end{cases}$$

$\Delta_1 = (2+3\mathrm{i})^2$ et $\Delta_2 = (2-3\mathrm{i})^2$ $\quad S = \{3+2\mathrm{i}, 3-2\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}\}$

4. $(z+1)^3-(z-1)^3 = 0 \Leftrightarrow Z^3 = 1$ où $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$ avec $z \neq 1 \Leftrightarrow Z = a$ où $a = 1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}$

On résout $\dfrac{z+1}{z-1} = a, z \neq 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1+a}{a-1}$ pour $a \neq 1$ $\quad S = \left\{\dfrac{1+\mathrm{j}}{\mathrm{j}-1}, \dfrac{1+\bar{\mathrm{j}}}{\bar{\mathrm{j}}-1}\right\}$

Fonctions usuelles, calcul intégral et équations différentielles

✎ 5 Déterminer l'ensemble de définition de l'expression $f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, puis simplifier l'expression de f par une technique de dérivation.

Solution de l'exercice 5 Par composition et inverse de fonction définie et dérivable ne s'annulant pas, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ avec pour tout $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{1}{x^2+1} = \mathrm{Arctan}'(x)$$

de sorte

- il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 1$, $f(x) = C + \mathrm{Arctan}\, x$. En faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $C = \mathrm{Arctan}\,(-1) - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{3\pi}{4}$ donc $f(x) = -3\pi/4 + \mathrm{Arctan}\, x$ pour tout $x > 1$.
- il existe $C' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x < 1$, $f(x) = C' + \mathrm{Arctan}\, x$ et en prenant $x = 0$ il vient $C = \pi/4$ donc $f(x) = \pi/4 + \mathrm{Arctan}\, x$ pour tout $x < 1$.

✎ 6

1) Déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2-x+1}$.

2) Réaliser le changement de variable $u = x^2$ dans l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$.

3) Rappeler une factorisation de x^3+1 pour tout réel x et déterminer trois réels a,b,c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \frac{x}{x^3+1} = \frac{ax+b}{x^2-x+1} + \frac{c}{x+1}$$

4) En déduire la valeur de I.

Solution de l'exercice 6

1) Avec la mise sous forme canonique sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int^X \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x &= \int^X \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}\,\mathrm{d}x = \int^X \frac{1}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(X-1/2)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2X-1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

Et on en déduit $\displaystyle\int^X \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int^X \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int^X \frac{2x-1+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int^X \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|X^2-X+1\right| + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2X-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int^X \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(X^2-X+1) + \frac{3}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2X-1}{\sqrt{3}}\right)$$

2) On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}(2x\,\mathrm{d}x)$. Comme $x \mapsto x^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$, le changement de variable $u = x^2$ est licite et en calculant $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ il vient

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\int_{0^2}^{1^2} \frac{u}{1+u^3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{1+u^3}\,\mathrm{d}u}$$

3) On rappelle la factorisation de $x^3+1 = x^3-(-1)^3 = (x+1)(x^2-x+1)$ pour tout réel x. Ensuite fixons trois réels a,b,c et calculons

$$\forall x \in \mathbb{R}\smallsetminus\{-1\} \qquad \frac{ax+b}{x^2-x+1}+\frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x+1)} = \frac{(a+c)x^2+(a+b-c)x+b+c}{(x^2-x+1)(x+1)}$$

Il suffit donc pour que l'égalité soit vérifiée d'avoir le système $\begin{cases} a \qquad +c = 0 \\ a+b-c = 1 \\ \qquad b+c = 0 \end{cases}$ qui équivaut facilement à $a = b = -c = \frac{1}{3}$ de sorte que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\smallsetminus\{-1\} \qquad \frac{x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}}$$

4) On en déduit avec la question 1 :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{u}{u^3+1}\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{1}{6}\ln(u^2-u+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{3}\ln(u+1)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}\ln 2 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}})-\frac{1}{3}\ln 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\ln 2 \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln 2\end{aligned}$$

Finalement, $$\boxed{I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln 2\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\ln 2}$$

---

7 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ le problème de Cauchy : $\begin{cases} xy'-2y = x^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

Solution de l'exercice 7

- Équation normalisée sur $\mathbb{R}_+^*$: $y' - \dfrac{2}{x}y = x$.
- Équation homogène : $y' - \dfrac{2}{x}y = 0 \iff \exists\lambda \in \mathbb{R} \quad y : x \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{2\ln x} = \lambda x^2$.
- Solution particulière sous la forme $s : x \longmapsto \lambda(x)x^2$ où $\lambda \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ est à déterminer en calculant

$$\forall x > 0 \qquad s'(x) - \frac{2}{x}s(x) = \lambda'(x)x^2 + \frac{2}{x}s(x) - \frac{2}{x}s(x) = \lambda'(x)x^2$$

  donc s solution *ssi* $\lambda'(x)x^2 = x$ pour tout $x > 0$ soit $\lambda' : x \longmapsto 1/x$ donc en prenant $\lambda = \ln$, une solution particulière est $x \longmapsto x^2\ln x$.
- Les solutions générales sont les fonctions $x \longmapsto (\lambda + \ln x)x^2$ où λ décrit $\mathbb{R}$.
- Condition initiale : pour une solution générale de la forme donnée avec constante λ, la condition $y(1) = 1$ donne $\lambda + 0 = 1$ soit $\lambda = 1$.
- La solution du problème de Cauchy est $x \longmapsto (1+\ln x)x^2$.

---

8 Résoudre $\quad (E) \quad y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^x \cos(2x)$.

Solution de l'exercice 8 • On résout d'abord, l'équation homogène associée à (E), qu'on notera (E_0). L'équation caractéristique $x^2 - 2x + 5 = 0$, de discriminant strictement $-16 = (4\mathrm{i})^2$, a pour racines $1 + 2\mathrm{i}$ et $1 - 2\mathrm{i}$. Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions de l'ensemble

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \mathrm{e}^x\left(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)\right) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}.$$

• Recherche d'une solution particulière de (E_0).
On écrit $\mathrm{e}^x \cos(2x) = \mathrm{e}^x \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}\right)$ et donc on cherche d'abord une solution de $(E_{\mathbb{C}}) \quad y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}$ pour en prendre la partie réelle (les coef du membre de gauche sont réels). Remarquons maintenant que $\gamma = 1 + 2\mathrm{i}$ est racine simple de l'équation caractéristique, le cours nous dit de chercher une solution particulière de la forme

$$z : x \longmapsto k\,x\,\mathrm{e}^{\gamma x}$$

où k est une constante à déterminer. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$z'(x) = k(1 + \gamma x)\mathrm{e}^{\gamma x} \qquad \text{et} \qquad z''(x) = k(2\gamma + \gamma^2 x)\mathrm{e}^{\gamma x}$$

donc

$$z''(x) - 2z'(x) + 5z(x) = k(\underbrace{(\gamma^2 - 2\gamma + 5)}_{=0} x + 2\gamma - 2)\mathrm{e}^{\gamma x} = 4\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\gamma x}$$

Ainsi, z est solution de $(E_{\mathbb{C}})$ si et seulement si $4\mathrm{i}k = 1$, c'est à dire si $k = \frac{1}{4\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{4}$. Une solution particulière de (E) est donc

$$x \longmapsto -\frac{x}{4}\mathrm{e}^x \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x}\right) = \frac{x}{4}\mathrm{e}^x \sin(2x)$$

• On sait alors que l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S}_E = \left\{x \mapsto \frac{x}{4}\mathrm{e}^x \sin(2x) + \mathrm{e}^x\left(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)\right) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Systèmes linéaires

9 Résoudre le système suivant d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On précisera la nature géométrique de l'ensemble des solutions.

$$\begin{cases} 3x - 6y - 6z + 8t = 2 \\ x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ -2x + 4y + 4z - 5t = 3 \\ 6x - 12y - 12z + 16t = 4 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 9 On opère sur la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & -12 & 16 & 4 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & -5 & 3 \\ 6 & -12 & -12 & 16 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1}}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 & -52 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est donc équivalent à $\begin{cases} x & = 2+2y \\ \quad y & = 0+1y \\ \qquad z & = 18+0y \\ \qquad\quad t & = 13+0y \end{cases}$: les solutions forment la droite de $\mathbb{R}^4$ passant par $A(2,0,18,13)$ et dirigée par $\overrightarrow{d}(2,1,0,0)$.

Applications

10 Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto (x+y, 2x+y, 3x-y) \end{cases}$.

1) Étudier l'injectivité de f.

2) Déterminer puis représenter graphiquement $f^{-1}((\mathbb{R}_+)^3)$.

3) Déterminer $\operatorname{Im} f$.
La fonction f est-elle surjective ? bijective ?

4) Déterminer $f(D)$ où D est la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $2x+y=1$.

Solution de l'exercice 10

1) Étudions l'injectivité de f. Soient x,y,x',y' des réels tels que $f(x,y) = f(x',y')$. Alors en particulier $\begin{cases} x+y = x'+y' \\ 2x+y = 2x'+y' \end{cases}$ qui donne nécessairement $x=x'$ en faisant l'opération L_2-L_1, et donc $x=x'$, puis facilement $y=y'$, de sorte que

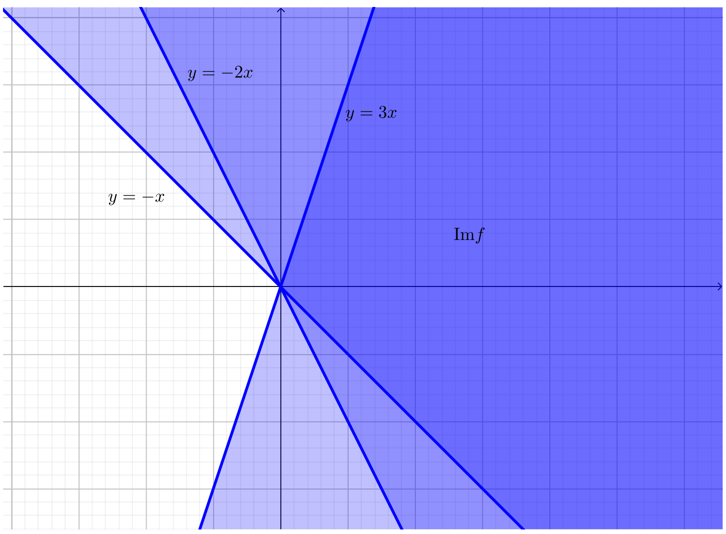
$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

2) Rappelons la définition de $f^{-1}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)\in B\}$ pour une partie $B\subset\mathbb{R}^3$ donc

$$\begin{aligned} f^{-1}((\mathbb{R}_+)^3) &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\geqslant 0 \quad\text{et}\quad 2x+y\geqslant 0 \quad\text{et}\quad 3x-y\geqslant 0\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geqslant -x \quad\text{et}\quad y\geqslant -2x \quad\text{et}\quad y\leqslant 3x\} \end{aligned}$$

est donc l'ensemble des points du plan à la fois

- au-dessus de la droite $D_1 : y=-x$;
- et au-dessus de la droite $D_2 : y=-2x$;
- et au-dessous de la droite $D_3 : y=3x$.



3) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Examinons à quelle condition sur a,b,c le système suivant est compatible :

$$\begin{cases} x+y=a \\ 2x+y=b \\ 3x-y=c \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\overset{L_3\leftarrow L_3-3L_1}{\iff}} \begin{cases} x+\quad y = a \\ \quad -y = b-2a \\ \quad -4y = c-3a \end{cases} \overset{L_2\leftarrow L_2-4L_3}{\iff} \begin{cases} x+y \quad = a \\ \quad -y \quad = b-2a \\ \qquad 0 = 5a-4b+c \end{cases}$$

qui est compatible *ssi* $5a - 4b + c = 0$. Comme (a,b,c) admet un antécédent par f si et seulement le système $f(x,y) = (a,b,c)$ d'inconnue (x,y) est compatible, il en résulte directement que

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = (a,b,c)\right\} \text{ est le plan de } \mathbb{R}^3 \text{ d'équation } 5a - 4b + c = 0.}$$

$$\boxed{\text{Comme Im} \neq \mathbb{R}^3,\ f \text{ n'est pas surjective et donc pas bijective.}}$$

4) Par définition, $f(D) = \{f(x,y) \mid 2x + y = 1\} = \{f(x, 1 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
$= \{(1 - x, 1, 5x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
$= \{x(-1; 0; 5) + (1; 1; -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
est la droite de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1; 0; 5$ et passant par le point $A(1; 1; -1)$.

Suites, limites

11 **1)** Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant

$$u_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = -3u_n + 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La suite (u_n) admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

2) Déterminer l'expression du terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$v_0 = 1,\ v_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad v_{n+2} = 2v_{n+1} + 2v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La suite (v_n) admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Solution de l'exercice 11

1) Le point fixe est $\ell = 1/2$, la suite $(g_n) = (u_n - \ell)$ est géométrique de raison -3. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = g_n + \ell = g_1(-3)^{n-1} + 1/2 = \frac{3}{2}(-3)^{n-1} + \frac{1}{2}}$$

Cette suite n'a pas de limite car $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2) L'équation caractéristique $r^2 - 2r - 2 = 0$ admet pour racines réelles distinctes $r_1 = 1 - \sqrt{3}$ et $r_2 = 1 + \sqrt{3}$ donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $v_n = A(1 - \sqrt{3})^n + B(1 + \sqrt{3})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le système donné par les conditions initiales donne $A + B = 1$ et $Ar_1 + Br_2 = 2$ et on trouve facilement

$$B = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}$$

On a $|r_1| < 1$ et $r_2 > 1$ donc ${r_1}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et ${r_2}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Vu $B > 0$, il vient donc

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

---

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, ainsi que $u_n = A_{2n}$ et $v_n = A_{2n+1}$.

1) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2) En déduire que la suite (A_n) converge.

Solution de l'exercice 12

1) On calcule facilement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = A_{2n+2} - A_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0$$

donc u_n est (strictement) décroissante. De même

$$v_{n+1} - v_n = A_{2n+3} - A_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n}}{2n} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} > 0$$

donc u_n est (strictement) croissante. Enfin $v_n - u_n = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\dfrac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Finalement

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}}$$

2) La question précédente et le théorème des suites adjacentes donnent que $(u_n) = (A_{2n})$ et $(v_n) = (A_{2n+1})$ convergent vers la **même** limite. Le théorème des suites recouvrantes assure alors que (A_n) converge, vers cette limite commune.
Remarque : en utilisant $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\,\mathrm{d}x$, on peut montrer que cette limite est $-\ln 2$.

Polynômes

13 Soit $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1) Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2) En déduire une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution de l'exercice 13

1) $X^4 - 6X^3 + 9X^2 = X^2(X^2 - 6X + 9) = X^2(X-3)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2) Dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = X^2(X-3)^2 + 9 = [X(X-3) + 3\mathrm{i}][X(X-3) - 3\mathrm{i}] = (X^2 - 3X + 3\mathrm{i})(X^2 - 3X - 3\mathrm{i})$$

$$P = \left(X - \frac{1}{2}(3 - (2-\mathrm{i})\sqrt{3})\right)\left(X - \frac{1}{2}(3 + (2-\mathrm{i})\sqrt{3})\right)\left(X - \frac{1}{2}(3 - (2+\mathrm{i})\sqrt{3})\right)\left(X - \frac{1}{2}(3 + (2+\mathrm{i})\sqrt{3})\right)$$

En regroupant les racines conjuguées, la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P = (X^2 - (3 - 2\sqrt{3})X + 24 + 12\sqrt{3})(X^2 - (3 + 2\sqrt{3})X + 24 - 12\sqrt{3})$$

---

14 Soit $P = (1+X)^5 - (1-X)^5$.

1) Développer le polynôme P et montrer que 0 est racine de P.

2) Décomposer P en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution de l'exercice 14

1) $P = 2(X^5 + 10X^3 + 5X) = 2X(X^4 + 10X^2 + 5)$.

2) $x^2+10x+5=0 \Leftrightarrow x=-5+2\sqrt{5}$ ou $x=-5-2\sqrt{5}$ donc

$$P=2X(X^2+5-2\sqrt{5})(X^2+5+2\sqrt{5})$$

Comme les facteurs de degré 2 ont un discriminant <0c c'est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Puis $x^2=-5+2\sqrt{5}<0 \Leftrightarrow x=\mathrm{i}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ou $x=-\mathrm{i}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $x^2=-5-2\sqrt{5} \Leftrightarrow x=\mathrm{i}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ ou $X=-\mathrm{i}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ donc dans $\mathbb{C}[X]$ la factorisation est

$$P=2X(X-\mathrm{i}\sqrt{5-2\sqrt{5}})(X+\mathrm{i}\sqrt{5-2\sqrt{5}})(X-\mathrm{i}\sqrt{5+2\sqrt{5}})(X+\mathrm{i}\sqrt{5+2\sqrt{5}})$$

Remarque : en utilisant la forme canonique, on obtient facilement la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^4+10X^2+5=(X^2+5)^2-20=(X^2+5-2\sqrt{5})(X^2+5+2\sqrt{5})$$

Espaces vectoriels

15 Soient $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-2y+z=0\}$ et $F=\{(a,2b-a,b),\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

1) Montrer que E et F sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera des bases et les dimensions.

2) Montrer que $E\cap F$ est une droite vectorielle.

3) Déterminer une base $\mathscr{B}=(u_1,u_2,u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $u_1\in E\cap F$, $u_2\in E$ et $u_3\in F$.

Solution de l'exercice 15

1re version

1) En paramétrant les solutions du système linéaire donné par E on a

$$E=\{(2y-z,y,z \mid y,z\in\mathbb{R})\}=\{y(2,1,0)+z(-1,0,1) \mid y,z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((2,1,0),(-1,0,1))$$

et par définition même, $F=\mathrm{Vect}((1,-1,0),(0,2,1))$ donc E,F sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Les familles génératrices données sont clairement libres (vecteurs non colinéaires) donc E,F sont de dimension 2 et $((2,1,0),(-1,0,1))$ est une base de E, $(1,-1,0),(0,2,1))$ est une base de F.

2) Par définition

$$\begin{aligned} E\cap F &= \{(a,2b-a,b) \mid a,b\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad a-2(2b-a)+b=0\} \\ &= \{(a,2b-a,b) \mid a,b\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad a=b\} \\ &= \{(a,a,a) \mid a\in\mathbb{R}\} \\ E\cap F &= \mathrm{Vect}\,\{(1,1,1)\} \end{aligned}$$

De sorte que $E\cap F$ est bien une droite vectorielle.

3) Posons $u_1=(1,1,1)\in E\cap F$, $u_2=(-1,0,1)$. La famille (u_1,u_2) est libre (vecteurs non colinéaires) et formée de vecteurs de E donc c'est une base de E. Posons enfin $u_3=(1,-1,0)\in F$. Comme $u_3\notin E$, il est facile de vérifier que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$, et répond donc à la question.

2e version

1) On a[1] $E=\mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,2))$ et par définition même, $F=\mathrm{Vect}\ (1,-1,0),(0,2,1))$ donc E,F sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Les familles génératrices données sont clairement libres (vecteurs non colinéaires) donc E,F sont de dimension 2 et $((1,1,1),(0,1,2))$ est une base de E, $(1,-1,0),(0,2,1))$ est une base de F.

2) $(1,-1,0)\wedge(0,2,1)=(-1,-1,2)$ est un vecteur normal à F
$(1,-2,1)\wedge(-1,-1,2)=(-3,-3,-3)$ est un vecteur directeur de $E\cap F$

3) $\mathscr{B}=((1,1,1),(0,1,2),(1,-1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $(1,1,1)\in E\cap F$, $(0,1,2)\in E$ et $(1,-1,0)\in F$.

---

1. C'est vrai mais je trouve que ça ne saute pas aux yeux, on ne tombe pas naturellement dessus en résolvant le système linéaire.

16 Déterminer le rang de $\mathscr{F} = (u,v,w)$ et déterminer si $\mathscr{F}$ est une base de l'espace $\mathbb{R}^3$:

1) $u = (1,0,1),\ \ v = (-1,2,3),\ \ w = (1,2,5)$

2) $u = (1,0,1),\ \ v = (-1,2,3),\ \ w = (1,2,-1)$

Solution de l'exercice 16

1) Clairement la famille (u,v) est libre (vecteurs non colinéaires). Ensuite on vérifie facilement que (u,v,w) l'est encore en considérant le système $xu + yv + zw = (0,0,0)$ d' inconnues x,y,z). Ainsi $\operatorname{rg} \mathscr{F} = 3$ et $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Clairement (u,v) est libre et $w = (1,2,-1) = 2u + v$ donc $\operatorname{rg} \mathscr{F} = 2$ et $\mathscr{F}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

---

17 Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}$.

Pour les PCSI : si $V \subset E$, on dit que V est un sous-espace vectoriel de E si V contient la fonction nulle et si V est stable par combinaisons linéaires.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit G l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

3) Montrer par analyse-synthèse que, pour toute fonction $h \in E$ il existe un unique couple $(f,g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$. Qu'a-t-on démontré ?

Solution de l'exercice 17

1) Clairement F contient la fonction nulle et est stable par combinaisons linéaires par linéarité de la dérivation et de l'évaluation en 0.

2) Toute fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $G \subset E$. Par définition on a

$$G = \{x \mapsto ax + b \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{a(x \mapsto x) + b(x \mapsto 1) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(u, \operatorname{Id}_{\mathbb{R}})$$

où les fonctions sont $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ et $\operatorname{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$. Par propriété du s.e.v. engendré par une famille finie de vecteurs, G est bien un s.e.v. de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3) Soit $h \in E$.

- Analyse : Supposons qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ telles que $h = f + g$. Alors on peut se donner a,b deux réels tels que $g(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De là on déduit $h(0) = f(0) + b = 0 + b$ donc $b = f(0)$. Puis $h'(0) = f'(0) + g'(0) = 0 + a$ donc $a = h'(0)$. Nécessairement $g : x \mapsto h'(0)x + h(0)$ et $f : x \mapsto h(x) - g(x) = h(x) - h'(0)x - h(0)$. L'analyse donne au plus un couple solution.
- Synthèse : posons $f : x \mapsto h(x) - h'(0)x - h(0)$ et $g : x \mapsto h'(0)x + h(0)$. Clairement f et g sont dans E. Clairement aussi, g est affine. Enfin on vérifie aisément que $f(0) = h(0) - h(0) = 0$ et $f'(0) = h'(0) - h'(0) = 0$ donc $f \in F$.
- Conclusion : pour tout $h \in E$, $\exists!(f,g) \in F \times G \quad h = f + G$. On a montré que $E = F \oplus G$.

---

18 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\right\}$ et $G = \operatorname{Vect}\{(1,1,1)\}$.

1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3) Décomposer le vecteur $(2,2,3)$ selon ces deux sous-espaces vectoriels.

4) Donner la décomposition d'un vecteur quelconque selon ces deux sous-espaces vectoriels.

Solution de l'exercice 18

1) Avec les techniques usuelles sur les systèmes linéaires $F = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(1,0,1))$ est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et G est par définition un s.e.v. engendré par un vecteur non nul donc un s.e.v., de dimension 1.

2) On a déjà $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Il suffit de vérifier que $F \cap G = \{0\}$. Or, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a,a,a) \in F$ si et seulement si $a + a - a = 0$ soit $a = 0$, ce qui établit le point souhaité. Ainsi, par caractérisation des supplémentaires en dimension finie : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

3) Un essai « raisonnable » montre que

$$(2,2,3) = \underbrace{(1,1,2)}_{\in F} + \underbrace{(1,1,1)}_{\in G}$$

4) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Par supplémentarité on sait qu'il existe $x,y,z,t \in \mathbb{R}$ avec $x + y - z = 0$ tels que $(a,b,c) = (x,y,z) + (t,t,t)$. On exploite la condition d'être dans F en calculant

$$a + b - c = x + y - z + t + t - t = 0 + t = t \qquad \text{soit} \qquad t = a + b - c$$

Finalement

$$x = a - t = -b + c \qquad y = b - t = -a + c \qquad \text{et} \qquad z = c - t = -a - b + 2c$$

L'unique décomposition de tout vecteur suivant $F \oplus G$ est

$$(a,b,c) = (-b + c, - a + c, - a - b + 2c) + (a + b - c, a + b - c, a + b - c)$$

Exercices d'approfondissement

✎ 19 L'objectif est de déterminer, par analyse-synthèse, l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$(E) : \quad P(X) = P'(X)P''(X).$$

1) (Analyse) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant l'équation (E).

1.a) Déterminer le degré de P.

1.b) Déterminer le coefficient dominant de P.

1.c) Justifier que le polynôme P' admet une racine α dans $\mathbb{C}$. Montrer que $P(\alpha) = 0$.

1.d) En dérivant chacun des membres de l'égalité (E), montrer que $P''(\alpha) = 0$.

1.e) Déduire de tout ce qui précède, la factorisation de P en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

2) (Synthèse) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}[X]$.

✎ 20 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \left\{ f \in E, \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Trouver un supplémentaire de F dans E.

Solution de l'exercice 20

1) F contient clairement la fonction nulle et est stable par combinaisons linéaires par linéarité de l'intégrale.

2) Prendre G le SEV des fonctions constantes. Une analyse-synthèse rapide en écrivant $\varphi = f + c$ avec $\displaystyle\int_0^1 f = 0$ et c constante montre que $c = \displaystyle\int_0^1 \varphi$ et que la décomposition de toute fonction de E est alors

$$\varphi = \underbrace{\left(\varphi - \int_0^1 \varphi \right)}_{\in F} + \underbrace{\int_0^1 \varphi}_{\in G}$$

✎ 21 On note $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à deux, et $\mathbb{R}_1[X]$ celui des polynômes de degré inférieur ou égal à un.

1) On considère l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \ P(-1) = P'(-1) = 0\}$.

Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, puis déterminer une base et la dimension de E.

2) On considère la famille de polynômes $\mathscr{B}' = (X^2,(X+1)^2,(X+2)^2)$.

2.a) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_2[X]$.

2.b) Exprimer les polynômes 1 et X comme combinaisons linéaires des polynômes de $\mathscr{B}'$.

2.c) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

Déterminer, en fonction de a, b et c, la matrice colonne des coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}'$.

✎ 22 On considère l'ensemble $H = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ (1-X^2)P'' - 3XP' + 15P = 0 \}$.

1) Sans expliciter H, montrer que H est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

2) Soit $P \in H$ non nul, de degré $n \in \mathbb{N}$ et de coefficient dominant $a_n \neq 0$.

Expliciter le terme de plus haut degré de $(1-X^2)P'' - 3XP' + 15P$. En déduire que $n = 3$.

Indication : on étudiera d'abord les cas $n = 0$ et $n = 1$.

3) Déterminer alors une base de H.

Solution de l'exercice 22

1) Si $P = 0$ alors $P'' = P' = 0$ et $(1-X^2)P'' - 3XP' + 15P = 0$. Donc $\underline{0_{\mathbb{R}[X]} \in H}$.

Soient $P,Q \in H$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. On a, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} & (1-X^2)(\lambda P + \mu Q)'' - 3X(\lambda P + \mu Q)' + 15(\lambda P + \mu Q) \\ = \ & \lambda \underbrace{\left((1-X^2)P'' - 3XP' + 15P\right)}_{=0 \text{ car } P \in H} + \mu \underbrace{\left((1-X^2)Q'' - 3XQ' + 15Q\right)}_{=0 \text{ car } Q \in H} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\lambda P + \mu Q \in H$ et <u>H est stable par combinaison linéaire</u>.

Donc $\boxed{H \text{ est bien un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = a_nX^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $a_n \neq 0$.

Si $n = 0$, $P' = P'' = 0$ et $(1-X^2)P'' - 3XP' + 15P = 15a_0 \neq 0$. Dans ce cas, $P \notin H$.

Si $n = 1$, $P' = a_1$, $P'' = 0$ et $(1-X^2)P'' - 3XP' + 15P = 12a_1X + 15a_0 \neq 0$. Dans ce cas, $P \notin H$.

Si $n \geqslant 2$, le terme de plus haut degré de $(1-X^2)P'' - 3XP' + 15P$ est

$$-n(n-1)a_nX^2X^{n-2} - 3na_nXX^{n-1} + 15a_nX^n = (-n^2 - 2n + 15)a_nX^n.$$

Si $P \in H$ alors $(1-X^2)P'' - 3XP' + 15P = 0$ et donc $-n^2 - 2n + 15 = 0$, car $a_n \neq 0$.

L'équation $-x^2 - 2x + 15 = 0$ a pour racines évidentes $3 \in \mathbb{N}$ et $-5 \notin \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{\text{si } P \in H \text{ est non nul alors son degré est } n = 3}$.

3) Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a : $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ et $P'' = 6aX + 2b$.

$$\begin{aligned}
& P \in H \\
\iff & (1 - X^2)(6aX + 2b) - 3X(3aX^2 + 2bX + c) + 15(aX^3 + bX^2 + cX + d) = 0 \\
\iff & 7bX^2 + (6a + 12c)X + (2b + 15d) = 0 \\
\iff & b = d = 0 \text{ et } a = -2c \\
\iff & P = -2cX^3 + cX = c(-X^3 + X).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{H = \text{Vect}(P_1), \text{ avec } P_1 = -X^3 + X}$.

✎ **23** On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, 0_2 sa matrice nulle et I_2 sa matrice unité.

On rappelle que le sous espace vectoriel engendré par $N,P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est noté Vect(N,P).

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Ainsi,

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \ AM - MA = 0_2\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $AM = MA$ si, et seulement si, $c = b$ et $d = a - 2b$.

En déduire que $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, J)$, où J est une matrice à déterminer.

3) Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{C}(A) \oplus \text{Vect}(K,L)$.

Solution de l'exercice 23

1) On a $A0_2 - 0_2A = 0_2$, donc $0_2 \in \mathcal{C}(A)$.

Soient $M,N \in \mathcal{C}(A)$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A = \lambda \underbrace{(AM - MA)}_{=0_2 \text{ car } M \in \mathcal{C}(A)} + \mu \underbrace{(AN - NA)}_{=0_2 \text{ car } N \in \mathcal{C}(A)} = 0_2.$$

Donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(A)$ est stable par combinaisons linéaires.

Finalement, $\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a : $AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix}$.

Donc $M \in \mathcal{C}(A) \iff AM = MA \iff \begin{cases} a+c = a+b \\ b+d = a-b \\ a-c = c+d \\ b-d = c-d \end{cases} \iff \begin{cases} c = b \\ d = a-2b \end{cases}$.

Donc $M \in \mathcal{C}(A) \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-2b \end{pmatrix} \iff M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, J), \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$.

3) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $x,y,z,t \in \mathbb{R}$. On a :

$$(xI_2 + yJ) + (zK + tL) = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ y & x-2y \end{pmatrix}.$$

Donc $M = (xI_2 + yJ) + (zK + tL) \iff \begin{cases} x+z & = & a \\ y+t & = & b \\ y & = & c \\ x-2y & = & d \end{cases} \iff \begin{cases} z & = & a-2c-d \\ t & = & b-c \\ y & = & c \\ x & = & 2c+d \end{cases}$.

Donc toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice de $\mathcal{C}(A)$ et d'une matrice de $\mathrm{Vect}(K,L)$.

Donc $\boxed{\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{C}(A) \oplus \mathrm{Vect}(K,L)}$.