Correction du devoir maison n° 15

Exercice 1 Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble P_m par son équation cartésienne

$$(4+m^2)x + (4-m^2)y - 4mz = m+8.$$

On note Ω le point de coordonnées $(0;1;-\frac{1}{4})$ et D la droite passant par Ω et dirigée par $\vec{i}$.

1. $4+m^2 \neq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ donc pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble P_m est un plan.
2. $\Omega_x(x,1,-\frac{1}{4})$ $\quad d(\Omega_x, P_m) = \dfrac{|(4+m^2)x + (4-m^2) + m - m - 8|}{\sqrt{(4+m^2)^2 + (4-m^2)^2 + 16m^2}}$

   $d(\Omega_x, P_m) = \dfrac{|(4+m^2)x - 4 - m^2|}{\sqrt{32 + 16m^2 + 2m^4}} = \dfrac{(4+m^2)|x-1|}{\sqrt{2}\sqrt{(m^2+4)^2}}$. Or $\sqrt{(m^2+4)^2} = m^2+4$ car $m^2+4>0$ pour tout m, donc la distance entre Ω_x et P_m est égale à $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{2}}$
3. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m soit tangent à la sphère de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dont le centre appartient à D ssi $d(\Omega_x, P_m) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |x-1| = 1 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 0$

   $S_1 : x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ est la sphère de de centre $\Omega_0(0,1,-\frac{1}{4})$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 2 On considère le plan P d'équation $x+2y-z+1=0$, P' le plan de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ passant par le point $A(2;0;0)$.

1. $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ donc les vecteurs $\vec{n'} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, vecteur normal à P' et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, vecteur normal à P, ne sont pas colinéaires, les plans P et P' sont donc sécants.

   L'intersection D des plan P et P' est alors une droite passant par le point B$(0,0,1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{n} \wedge \vec{n'}\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\vec{u'}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc

$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, est une représentation paramétrique de (D)

2. Pour tout réel m, on note P_m l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $(1+m)x + (2-m)y + (-1+2m)z + 1 - 2m = 0$.

   (a) $1+m = 0 \Leftrightarrow m = -1, 2-m = 0 \Leftrightarrow m = 2, -1+2m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ donc, pour tout réel m, l'ensemble P_m est un plan.

   (b) $-(1+m)t + (2-m)t + (-1+2m)(1+t) + 1 - 2m =$
   $(-m - m + 2m - 1 + 2 - 1)t - 1 + 2m + 1 - 2m = 0$ donc D est incluse dans P_m, pour tout réel m.

   (c) Un vecteur directeur de P_m est alors $\overrightarrow{u'} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} . \overrightarrow{n_m} \begin{pmatrix} 1+m \\ 2-m \\ -1+2m \end{pmatrix} = 0$
   donc $\overrightarrow{v'}$ est aussi un vecteur directeur de P_m .

   (d) $P \perp P_m \Leftrightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{n_m} = 0$ pour tout m
   $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n_m} = 6 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ Donc $P \perp P_2$.

3. On considère l'ensemble S des points $M(x;y;z)$ vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 0$.

   (a) $S : (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$ donc S est la sphère de centre $\Omega(-1, 2, 0)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

   (b) $P_{\frac{1}{2}} : x + y = 0$. $d(\Omega, P_{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{5}$ donc $C = P_{\frac{1}{2}} \cap S$ est un cercle de centre B et de rayon r.

   B est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan $P_{\frac{1}{2}}$ donc l'intersection de la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\overrightarrow{n_{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, normal à $P_{\frac{1}{2}}$, dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 2+t \\ z = 0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$x+y=0 \Leftrightarrow 1+2t=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$ et B$(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},0)$

De plus, d'après le théorème de Pythagore, $d(\Omega,P_{\frac{1}{2}})^2+r^2=5$ d'où $r^2=\dfrac{9}{2}, r=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

(c) $OB^2=\dfrac{9}{2}$ et $O\in P_{\frac{1}{2}}$ donc $O\in C$

La tangente T au cercle C en O est dans le plan $P_{\frac{1}{2}}$ et est orthogonale au rayon [OB] donc dans le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{OB}$ qui a alors pour équation cartésienne $x-y=0$

Un système d'équation cartésienne de T est $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad k\in\mathbb{R}$