Correction Test n° 17 Sujet A

1.
2. $A = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;/\; u_n \to \ell \right\}$ Soit $\ell \in \mathbb{R}$ fixé. $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   Si $\ell \neq 0$: A ne contient pas la suite nulle car elle ne converge pas vers ℓ. Dans ce cas, A n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   Si $\ell = 0$: A contient la suite nulle et si $u = (u_n) \in A$, $v = (v_n) \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a :

   $u_n \to 0 = \ell$, $v_n \to 0 = \ell$ donc $u_n + \lambda v_n \to 0 = \ell$, par opérations sur les limites.

   Donc $u + \lambda v \in A$ et A est stable par combinaison linéaire. Donc $\boxed{A \text{ est un s.e.v. de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.
3. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est engendré par
   $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$
4. $P_0 = X^3 + X^2 \quad P_1 = X^2 + X \quad P_2 = X + 1 \quad P_3 = 1$

   (P_0, P_1, P_2, P_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ car elle est échelonnée en degré.

   De plus, tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ peut s'écrire
   $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = aP_0 + (b-a)P_1 + (c-b)P_2 + (d-c)P_3$ donc cette famille est aussi génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Correction Test n° 17 Sujet B

1.
2. $A = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;/\; f(1) = b \right\}$ Soit $b \in \mathbb{R}$ fixé. $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   Si $b \neq 0$: A ne contient pas la fonction nulle par laquelle l'image de 1 est $0 \neq b$. Dans ce cas, A n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

   Si $b = 0$: A contient la fonction nulle et si $f, g \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a :

   $$(f + \lambda g)(1) = f(1) + \lambda g(1) = 0 + \lambda \times 0 = 0 \text{ donc } f + \lambda g \in A,$$

   et A est stable par combinaison linéaire. Donc $\boxed{A \text{ est un s.e.v. de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.
3. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+b & c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. est engendré par
   $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

4. $P_0 = X^2 + X^3 \quad P_1 = X + X^2 \; P_2 = 1 + X \quad P_3 = 1$

   (P_0, P_1, P_2, P_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ car elle est échelonnée en degré.

   De plus, tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ peut s'écrire
   $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = aP_0 + (b-a)P_1 + (c-b)P_2 + (d-c)P_3$ donc cette famille est aussi génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.