Correction du devoir maison n$^{\text{o}}$ 16

Exercice 1

1. (Analyse) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et vérifiant l'équation (E).

   (a) On pose $n = \deg(P)$. Comme P est non nul alors $n \in \mathbb{N}$.

   $P'(X)P''(X) = P(X) \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ donc P' et P'' sont non nuls, car sinon $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$.

   Donc $\deg(P') = n-1 \geq 0$, $\deg(P'') = n-2 \geq 0$ et on a :

   $$\deg(P) = \deg(P'P'') \iff n = (n-1)+(n-2) \iff n = 3.$$

   Donc $\boxed{P \text{ est un polynôme de degré } 3}$.

   (b) On peut donc écrire $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$, avec $a \neq 0$. Et on a :

   $P' = 3aX^2 + 2bX + c$, $P'' = 6aX + 2b$ et le coefficient dominant de $P'P''$ est $18a^2$.

   Comme $P'(X)P''(X) = P(X)$ et $a \neq 0$, on a : $18a^2 = a \iff a = \dfrac{1}{18}$.

   Donc $\boxed{\text{le coefficient dominant de } P \text{ est } a = \dfrac{1}{18}}$.

   (c) $\deg(P') = 2$ donc $\boxed{P' \text{ admet au moins une racine } \alpha \text{ dans } \mathbb{C}}$, d'après le cours sur les équations du second degré à coefficients complexes, ou d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

   Comme P vérifie (E), on a : $P(\alpha) = \underbrace{P'(\alpha)}_{=0} P''(\alpha) = 0$. Donc $\boxed{\alpha \text{ est racine de } P}$.

   (d) En dérivant chacun des membres de l'égalité (E), on obtient :

   $P'(X) = P''(X)P''(X) + P'(X)P^{(3)}(X)$ donc $[P''(\alpha)]^2 = \underbrace{P'(\alpha)}_{=0} - \underbrace{P'(\alpha)}_{=0} P^{(3)}(\alpha) = 0$.

   Donc on a bien $\boxed{P''(\alpha) = 0}$.

   (e) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$ donc α est racine de P de multiplicité au moins 3.

   Comme le nombre de racines de P comptées avec multiplicités est majoré par $\deg(P) = 3$, α est racine de P de multiplicité 3 et α est l'unique racine de P dans $\mathbb{C}$.

   Donc $\boxed{P = \dfrac{1}{18}(X-\alpha)^3}$, car le coefficient dominant de P est $a = \dfrac{1}{18}$.

2. (Synthèse) Soit $P = \dfrac{1}{18}(X-\alpha)^3$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$. On a :

   $P' = \dfrac{3}{18}(X-\alpha)^2$, $P'' = \dfrac{6}{18}(X-\alpha)$ et $P'P'' = \dfrac{1}{18}(X-\alpha)^3$. Donc $P'(X)P''(X) = P(X)$.

   Si P est nul, cette égalité est encore vérifiée.

   Par analyse-synthèse, on a montré que l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{1}{18}(X-\alpha)^3\ ,\ \alpha \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ 0_{\mathbb{C}[X]} \right\}}.$$

Exercice 2 On note $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à deux.

1. Soit $P \in E$, -1 est racine double de P donc P est divisible par $(X+1)^2$ et P est de degré 2 donc

   Donc $E = \left\{ a(X+1)^2,\ a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\,((X+1)^2)$,
   qui est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par $(X+1)^2 \neq 0$.

   Donc $\boxed{E \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}_2[X]\text{, de base } ((X+1)^2)\text{, et de dimension } 1}$.

2. (a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
aX^2 + b(X+1)^2 + c(X+2)^2 = 0 &\iff (a+b+c)X^2 + (2b+4c)X + (b+4c) = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ & & 2b & + & 4c & = & 0 \\ & & b & + & 4c & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ & & 2b & + & 4c & = & 0 \\ & & & & 4c & = & 0 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{array} \right. \\
&\iff a = b = c = 0.
\end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{B}'$ est une famille libre de 3 éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3.

   Donc $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$, et $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\,((X+1)^2) \oplus \text{Vect}\,(X^2,(X+2)^2)$.

   Donc $\boxed{E \text{ et Vect}\,(X^2,(X+2)^2) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_2[X]}$.

   (b) $X^2 - 2(X+1)^2 + (X+2)^2 = X^2 - 2X^2 - 4X - 2 + X^2 + 4X + 4 = 2$.

   Donc $\boxed{1 = \dfrac{1}{2}X^2 - (X+1)^2 + \dfrac{1}{2}(X+2)^2}$.

$(X+2)^2-(X+1)^2-3=X^2+4X+4-X^2-2X-1-3=2X.$

Donc $X=\frac{1}{2}(X+2)^2-\frac{1}{2}(X+1)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}X^2-(X+1)^2+\frac{1}{2}(X+2)^2\right).$

Donc $\boxed{X=-\frac{3}{4}X^2+(X+1)^2-\frac{1}{4}(X+2)^2}$.

(c) Soit $P=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X]$.

$P=aX^2+b\left(-\frac{3}{4}X^2+(X+1)^2-\frac{1}{4}(X+2)^2\right)+c\left(\frac{1}{2}X^2-(X+1)^2+\frac{1}{2}(X+2)^2\right).$

Donc $\boxed{Mat_{\mathscr{B}'}(P)=\begin{pmatrix} a-\frac{3}{4}b+\frac{1}{2}c \\ b-c \\ -\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c \end{pmatrix}}$.