Correction du Test n^o 18

Sujet A

1.

2. (a) On trouve $F = \text{Vect}\big((1,0,-2,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\big)$ et on démontre que cette famille est libre

   $G = \text{Vect}\big((6,3,2,0),(0,0,0,1)\big)$, 2 vecteurs non colinéaires donc F et G sont des *sev* de $\mathbb{R}^4$ de dimensions respectivement 3 et 2.

   (b) Un supplémentaire de F est $F' = \text{Vect}\big((0,0,1,0)\big)$:
   en effet, la famille $\big((1,0,-2,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ car c'est une famille libre (à démontrer)

   Un supplémentaire de G est $G' = \text{Vect}\big(0,1,0,0),(0,0,1,0)\big)$. La justification est la même que pour F.

Correction du Test n^o 18

Sujet B

1.

2. (a) $(1,1,0,0)$ et $(0,0,1,1)$ sont deux vecteurs linéairement indépendants de F, donc F est de dimension au moins 2.

   $(-2,1,0,0)$ et $(0,0,-1,2)$ sont deux vecteurs linéairement indépendants de G, donc G est de dimension au moins 2.

   (b) Pour trouver les éléments de $F \cap G$, on résout un système de quatre équations à 4 inconnues dont la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{(Gauss Jordan)}$$

   Cette matrice est inversible donc le système admet pour unique solution $(0,0,0,0)$, donc $F \cap G = \{0\}$.

   (c) D'après la formule de Grassman, $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$. Or $\dim(F+G) \leq 4$, $\dim F \geq 2$ et $\dim G \geq 2$, donc nécessairement $\dim F = 2$ et $\dim G = 2$, et les vecteurs exhibés à la question 1 sont des bases de F et de G.