Lycée Jean Perrin | PTSI 1 & 2

DS5 de Mathématiques - 2 heures
Le samedi 23 mars 2024

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n°1 (Géométrie plane) (4 points:**1)** 1 **2)** 2x0.5 **3)** 1 **4)** 1)

Soit ABCD un carré de côté 1.
Pour tout réel $\lambda \in]0, 1[$, considérons les points P_λ sur [AB] et Q_λ sur [BC] tels que $BP_\lambda = BQ_\lambda = \lambda$.
Notons H_λ le projeté orthogonal de B sur la droite $(P_\lambda C)$.
On choisit de travailler dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$.

1) Donner les coordonnées des points B, C, A, D, P_λ, Q_λ dans le repère $\mathcal{R}$.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(P_\lambda C)$ puis une équation cartésienne de la droite $(H_\lambda B)$.

3) Quelles sont les coordonnées de H_λ? (Justifier votre réponse)

4) En déduire que les droites $(H_\lambda Q_\lambda)$ et $(H_\lambda D)$ sont systématiquement perpendiculaires.

Exercice n°2 (Géométrie dans l'espace) (4 points: **1)** 1 **2)** 1.5 **3)** 1.5)

L'espace est muni du repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Notons Γ le graphe d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 4z + 10 = 0$.

1) Déterminer la nature de Γ ainsi que ses éléments caractéristiques.

2) Soient A et B deux points distincts. En introduisant le projeté orthogonal H de M sur la droite (AB) démontrer que la distance de M à (AB) n'est autre que $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.

3) Soit D la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x &= 3 + 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2 - t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$. Décrire la position relative de D à Γ.

<u>Exercice n°3 (Polynômes)</u> (6 points:**A - 1)** 1 **2)** 1 **B - 0)** 0.5 **1)** 1 **2)** 0.5 **3)** 0.5 **4)** 0.5 **5)** 2x0.5)

A - Division euclidienne

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-2)^{2n}+(X-3)^n+1$ par

1) $(X-3)(X-2)$

2) $(X-3)^2$

B - factorisation

0) Montrer que si $z_0 \in \mathbb{C}$ est racine d'un polynôme P à coefficients réels il en est de même de $\overline{z_0}$.

Soit $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1) Vérifier que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de P.

2) Montrer que P est pair.

3) En déduire que $D = X^4 + X^2 + 1$ est un diviseur de P.

4) Déterminer le quotient de P par D.

5) À partir des questions précédentes, factoriser en éléments irréductibles P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

<u>Exercice n°4 (Espaces vectoriels)</u> (6 points: **1)** 3x0.5 **2)** 1 **3)** 1 **4)** 1+0.5 **5)** 1)

Soit $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ et les vecteurs $\vec{v_1} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_4}$, $\vec{v_2} = \vec{e_1} + 2\vec{e_3} + \vec{e_4}$, $\vec{v_3} = 2\vec{e_1} + 4\vec{e_3} + 2\vec{e_4}$, $\vec{w_1} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{w_2} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} + \vec{e_4}$, $\vec{w_3} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_4}$, $\vec{w_4} = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 2\vec{e_3} + 2\vec{e_4}$.

1) Montrer que les familles $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$, $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$ et $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ sont libres.

2) Posons $G = \text{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$. Prouver que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ en est une base.

3) Posons $H = \text{Vect}\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}, \vec{w_4}\}$. Déterminer sa dimension.

4) Montrer que $G + H = \mathbb{R}^4$. Pourquoi cette somme ne peut être directe?

5) Déterminer une base de $G \cap H$.