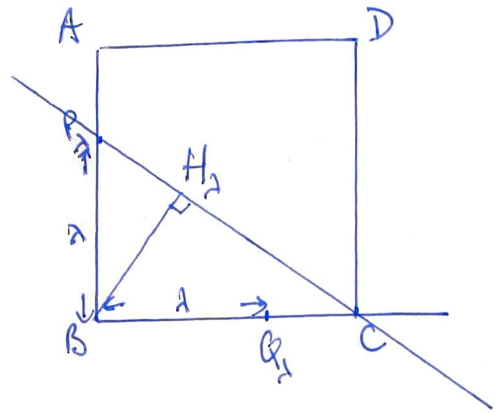
DS 5 - mars 2024 - PTSI

Ex 1



1) $\boxed{B\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix},\ C\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix},\ A\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix},\ D\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix},\ P_\lambda\begin{vmatrix}0\\\lambda\end{vmatrix},\ Q_\lambda\begin{vmatrix}\lambda\\0\end{vmatrix}}$

2) $\boxed{x+\dfrac{y}{\lambda}=1 \quad (P_\lambda C)}$

$(H_\lambda B)$ a pour vecteur directeur $\begin{vmatrix}1\\\frac{1}{\lambda}\end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix}\lambda\\1\end{vmatrix}$ elle a donc $x-\lambda y=0$ puisqu'elle passe par l'origine.

$\boxed{x-\lambda y=0 \quad (H_\lambda B)}$

3) $H_\lambda=(P_\lambda C)\cap(H_\lambda B)$. Ses coordonnées satisfont donc

$$\begin{cases}x+\dfrac{y}{\lambda}=1\\ x-\lambda y=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda y+\dfrac{y}{\lambda}=1\\ x=\lambda y\end{cases} \iff \begin{cases}y=\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}\\ x=\lambda y\end{cases}$$

Ainsi $\boxed{H_\lambda\begin{vmatrix}\dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\\[2mm] \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}\end{vmatrix}}$

4) Ainsi $\overrightarrow{H_\lambda Q_\lambda}=\begin{vmatrix}\lambda-\dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\\[2mm] 0-\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\lambda+\lambda^3-\lambda^2}{1+\lambda^2}\\[2mm] -\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}\end{vmatrix}$

et $\overrightarrow{H_\lambda D}=\begin{vmatrix}1-\dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\\[2mm] 1-\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{1+\lambda^2}\\[2mm] \dfrac{1+\lambda^2-\lambda}{1+\lambda^2}\end{vmatrix}$

On calcule $\overrightarrow{H_\lambda Q_\lambda}\cdot\overrightarrow{H_\lambda D}=\dfrac{\lambda+\lambda^3-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}-\dfrac{\lambda(1+\lambda^2-\lambda)}{(1+\lambda^2)^2}$

so $\overrightarrow{H_\lambda Q_\lambda}\cdot\overrightarrow{H_\lambda D}=0$.

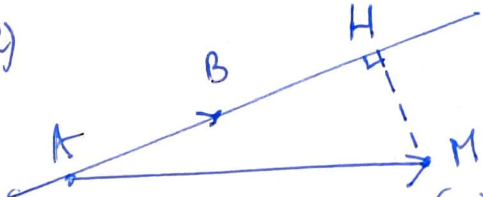
$\boxed{(H_\lambda Q_\lambda) \text{ et } (H_\lambda D) \text{ sont donc systématiquement perpendiculaires.}}$

Ex 2

1) $x^2+y^2+z^2-8x-2y+4z+10=0$

$\iff (x-4)^2-16+(y-1)^2-1+(z+2)^2-4+10=0$

$\iff (x-4)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=11$ Γ est donc la sphère de centre $\boxed{C\begin{vmatrix}4\\1\\-2\end{vmatrix}}$ et rayon $\boxed{\sqrt{11}}$

2) 

Cette distance n'est autre que $HM = \|\overrightarrow{HM}\|$.

Or $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{AB}$

et $\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

D'où $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{AB}$ et $\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{HM}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\|$

puisque $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Ainsi $\boxed{\|\overrightarrow{HM}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}}$

3) La distance du centre C de Γ à D vaut, d'après 2),

$d(C, D) = \dfrac{\|\overrightarrow{AC} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ où $A \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \in D$ et $\vec{u} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

Or $\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 4-3 \\ 1-1 \\ -2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{vmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AC} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{vmatrix}$

Ainsi $\|\overrightarrow{AC} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{66} = \sqrt{6 \times 11}$

et $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ de sorte que $d(C, D) = \sqrt{11}$

Or $\sqrt{11}$ est le rayon de Γ.

D est donc tangente à Γ.

Ex3 A - 1) Le reste $R(X) = \alpha X + \beta$ (degré < 2) satisfait à l'équation $(X-2)^{2n} + (X-3)^n + 1 = Q(X)(X-3)(X-2) + \alpha X + \beta \quad \forall X \in \mathbb{R}$

si $n > 0$

$X = 2 \Rightarrow \quad (-1)^n + 1 = 2\alpha + \beta$

$X = 3 \Rightarrow \quad 2 = 3\alpha + \beta$

d'où $\alpha = 1 - (-1)^n$

et $\beta = 2 - 3(1 - (-1)^n)$
$= -1 + 3(-1)^n$

Ainsi $\boxed{R(X) = (1 - (-1)^n) X - 1 + 3(-1)^n \quad \text{pour } n > 0}$

si $n = 0$ $\quad R(X) = 3$

2) De même $R(X) = \alpha X + \beta$ tel que

(*) $(X-2)^{2n} + (X-3)^n + 1 = Q(X)(X-3)^2 + \alpha X + \beta \quad \forall X$

si $n > 1$ $\quad X = 3 \Rightarrow 2 = 3\alpha + \beta$

dérivons (*)

$$2n(X-2)^{2n-1} + n(X-3)^{n-1} = (X-3)\left[Q'(X)(X-3) + 2Q(X)\right] + \alpha$$

$X = 3 \Rightarrow 2n = \alpha$

d'où $\boxed{R(X) = 2nX + 2 - 6n \quad \text{si } n > 1}$

si $n = 1$ on a encore $2 = 3\alpha + \beta$

mais cette fois-ci $\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{2n} + 1 = \alpha$ soit $\alpha = 3$ et $\beta = -7$

d'où $R(X) = 3X - 7$ si $n = 1$

si $n = 0$ $\quad R(X) = 3$

B – 0) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(z_0) = 0$.

Alors $\overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0 = \overline{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k\right)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, \overline{z_0}^k$

Par hypothèses, $\overline{a_k} = a_k$.

D'où $\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0}^k = 0$ soit $P(\overline{z_0}) = 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, si } z_0 \text{ est racine d'un polynôme à coefficients réels, il en est de même de } \overline{z_0}.}$

1) Rappelons que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.

D'où $P(j) = j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1$

$= (j^3)^2 j^2 + 2(j^3)^2 + 3j^3 . j + 2j^2 + 1$

$= j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1$

$= 3(1 + j + j^2) = 3 \times 0 = 0$

$\boxed{j \text{ est racine de } P}$

2) $P(-X) = (-X)^8 + 2(-X)^6 + 3(-X)^4 + 2(-X)^2 + 1$

$= X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$

$= P(X) \quad \forall X$

<u>P est donc pair</u>

3) On déduit du 2) 1) a) que $j, -j, \bar{j}$ et $-\bar{j}$ sont racines de P. Donc $(X-j)(X-\bar{j}) = X^2 + X + 1$ et $(X+j)(X+\bar{j}) = X^2 - X + 1$ sont diviseur de P.

Par suite $(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1) = X^4 + \cancel{X^3} + \cancel{X^2} - \cancel{X^3} - \cancel{X^2} - \cancel{X} + X^2 + \cancel{X} + 1$

$= \underline{X^4 + X^2 + 1 = D}$

<u>est un diviseur de P.</u>

4) Posons la division euclidienne

$$\begin{array}{l|l} X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1 & X^4 + X^2 + 1 \\ \cline{2-2} X^8 + X^6 + X^4 & X^4 + X^2 + 1 \\ \hline \quad X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1 & \\ \quad X^6 + X^4 + X^2 & \\ \hline \qquad X^4 + X^2 + 1 & \\ \qquad X^4 + X^2 + 1 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Ainsi $\boxed{P = D^2}$

5) Il résulte du 3) que la factorisation de P en éléments irréductibles est :

$\boxed{P = (X-j)^2 (X-\bar{j})^2 (X+j)^2 (X+\bar{j})^2 \text{ dans } \mathbb{C}[X]}$

et $\boxed{P = (X^2 + X + 1)^2 (X^2 - X + 1)^2 \text{ dans } \mathbb{R}[X]}$

(Ex 4) 1) Etudions la liberté des familles par la méthode du pivot de Gauss dans la base canonique.

$$\begin{array}{cc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ayant 2 pivots

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre.

$$\begin{array}{ccc} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ayant 3 pivots
$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ est libre

$$\begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{w}_1 & \vec{w}_2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ayant 4 pivots
$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est libre

2) Par définition $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est génératrice de G.
Est-elle libre ?

$$\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N'obtenant que 2 pivots en première et seconde colonnes, on en déduit que cette famille est liée et plus précisément que $\vec{v_3}$ est combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

D'où $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\} = \mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = G$ avec $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ libre (ce que l'on sait depuis 1)).

$\boxed{\text{Ainsi, } \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} \text{ étant libre et génératrice de } G \text{, en est une base}}$

3) Observons que $\vec{w_4} = \vec{w_1} + \vec{w_2} + \vec{w_3}$

d'où $H := \mathrm{Vect}\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}, \vec{w_4}\} = \mathrm{Vect}\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$

Donc $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$ est libre (d'après 1)) et génératrice de H. C'en est donc une base.

D'où $\underline{\dim H = 3}$

4) $G+H$ admet $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$ comme famille génératrice d'après 2) et 3). Or, d'après 1), $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w_1}, \vec{w_2}\}$, qui en est une sous-famille, est libre.

Donc $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w_1}, \vec{w_2}\} \subseteq G+H \subseteq \mathbb{R}^4$.

Mais $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ admet $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ comme base et est donc de dimension 4 comme $\mathbb{R}^4$. D'où

$$\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w_1}, \vec{w_2}\} = \mathbb{R}^4 \subseteq G+H \subseteq \mathbb{R}^4$$

et $\boxed{G+H = \mathbb{R}^4}$

D'après Grassmann, $\dim(G\cap H) = \dim G + \dim H - \dim(G+H)$
$= 2 + 3 - 4 = 1 \neq 0$

donc $\underline{\text{cette somme } G+H \text{ n'est pas directe}}$.

5) $\vec{v} \in G \cap H \iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$

et $\exists\, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v} = \mu_1 \vec{w}_1 + \mu_2 \vec{w}_2 + \mu_3 \vec{w}_3$

$\iff \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 - \mu_1 \vec{w}_1 - \mu_2 \vec{w}_2 - \mu_3 \vec{w}_3 = \vec{0} \quad (E)$

Résolvons ce système linéaire homogène par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit l'ensemble des solutions de (E)

$$\begin{cases} \lambda_1 = p \\ \lambda_2 = p \\ \mu_1 = p \\ \mu_2 = p \\ \mu_3 = p, \ p \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donc $\vec{v} \in G \cap H$ s'il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{v} = p\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) = p\left(\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3\right)$$

Ainsi $G \cap H = \text{Vect}\left\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right\}$

$$\boxed{\left\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right\} = \left\{\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3\right\} = \left\{\vec{w}_4\right\} \text{ est une base de } G \cap H}$$