Analyse asymptotique

Exercice 1 Déterminer un équivalent simple de :

a) $\dfrac{(1-\cos(x))\tan(x)}{x\sin^2(3x)}$ en 0 b) $x\ln(\mathrm{e}^x+1)$ en $-\infty$ c) $x^{\frac{1}{x}}-1$ en $+\infty$.

Exercice 2 Calculer les développements limités suivants :

1. a) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sqrt[4]{x+1}$ b) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{2+x}$
2. a) $\mathrm{DL}_4(\pi)$ de $\ln(\cos(2x))$ b) $\mathrm{DL}_3(1)$ de $\sin(\pi x)\ln(x)$
3. a) $DL_3(0)$ de $\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$ b) $DL_2(0)$ de $\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$

Exercice 3 1. Déterminer le $\mathrm{DL}_1(0)$ de arcsin. 2. Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de arcsin.

Exercice 4 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}^{x^2+x}-\mathrm{e}^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Exercice 5 Soit f définie sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{x+2}{2x}\ln(1+x)$.

1. Démontrer que f admet une limite finie ℓ en 0.
2. Déterminer un équivalent et le signe de $f(x)-\ell$ au voisinage de 0.
3. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

Exercice 6 Soit $f : x\mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x}$.

1. Prolonger f par continuité en 0 et montrer que ce prolongement est dérivable en 0.
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0, puis étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Exercice 7 Déterminer la position relative de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ par rapport à ses tangentes localement aux points d'abscisses 0 et 1.

Exercice 8 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{1-\cos(2x)}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f puis sa période.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 mais pas en π.
3. Démontrer que le prolongement par continuité de f est dérivable en 0 et donner son nombre dérivé, ainsi que la position de sa courbe représentative par rapport à sa tangente localement au point d'abscisse 0.

Exercice 9 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Étudier les variations de f et déterminer si elle admet des extrema locaux.
2. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente $\mathcal{T}_0$ en son point d'abscisse 0.
   Donner une équation de $\mathcal{T}_0$ et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{T}_0$ au voisinage de 0.
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ en $+\infty$.
   Donner une équation de $\mathcal{D}$ et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$.
4. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ en $-\infty$.
   Donner une équation de Δ et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ au voisinage de $-\infty$.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 10 Déterminer un équivalent simple de :

a) $u_n = \ln\left(1 + n\tan\frac{1}{n^2}\right)$ b) $u_n = \sqrt{1+n^2} - an$ c) $u_n = \lfloor an \rfloor$, $a \neq 0$.

Exercice 11

1. Montrer que $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
2. Montrer que $\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\pi(-1)^n}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
3. Montrer que $\arctan(n) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$