Analyse asymptotique

1 Relations de comparaison : cas des fonctions

Dans toute cette partie, f et g sont des fonctions définies sur un intervalle I, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est élément ou extrémité de I, et g ne s'annule pas sur $I \backslash \{a\}$.

1.1 Relations de domination et de négligeabilité

Définition 1. On dit que f est **dominée** par g en a si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$, et on dit que f est un "grand o" de g en a.

Exemple 1. Montrer que a) $5x^3 - 3x^2 \underset{x \to 0}{=} \mathcal{O}(x^2)$ b) $5x^3 - 3x^2 \underset{x \to \pm\infty}{=} \mathcal{O}(x^3)$.

Définition 2. On dit que f est **négligeable** devant g en a si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big)$, et on dit que f est un "petit o" de g en a.

Exemple 2. Montrer que a) $5x^3 - 3x^2 \underset{x \to 0}{=} o(x)$ b) $5x^3 - 3x^2 \underset{x \to \pm\infty}{=} o(x^4)$.

Propriété 1. La relation de négligeabilité vérifie :

1. $f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big) \Longrightarrow f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ (la réciproque est fausse).
2. $f(x) \underset{x \to a}{=} o(1) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
3. $\Big(f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big)$ et $g(x) \underset{x \to a}{=} o\big(h(x)\big) \Big) \Longrightarrow f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(h(x)\big)$ **transitivité**.

Propriété 2. **Croissances comparées** Pour tous réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ on a

$$[\ln(x)]^\gamma \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^\alpha\right), \quad x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right) \text{ et } \quad [\ln(x)]^\gamma \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right).$$

Propriété 3. **Opérations sur les** o Si $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors

$$o\left(x^n\right) + o\left(x^n\right) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^n\right) \qquad \lambda \times o\left(x^n\right) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^n\right)$$

$$x^p \times o\left(x^n\right) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^{n+p}\right) \qquad \frac{1}{x^p} \times o\left(x^n\right) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^{n-p}\right).$$

1.2 Relation d'équivalence

Définition 3. On dit que f est **équivalente** à g en a si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Exemple 3. Démontrer que a) $5x^3 - 3x^2 \underset{x\to 0}{\sim} -3x^2$ b) $5x^3 - 3x^2 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 5x^3$

Propriété 4. La relation d'équivalence vérifie :

1. Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow f(x) - \ell \underset{x\to a}{=} o(1)$.

   Dans ce cas, on écrit $f(x) \underset{x\to a}{=} \ell + o(1)$.

2. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

   Dans ce cas, on écrit $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$.

3. De plus, la relation "$\sim$" pour les fonctions est réflexive, symétrique et transitive.

Propriété 5. Équivalents usuels $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$.

Propriété 6. Compatibilité avec les opérations

Si f, g, h et l sont telles que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} l(x)$ alors

1. $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)l(x)$ $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g(x)}{l(x)}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $[f(x)]^k \underset{x\to a}{\sim} [g(x)]^k$

2. si f et g sont strictement positives au voisinage de a, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $[f(x)]^\alpha \underset{x\to a}{\sim} [g(x)]^\alpha$.

Remarque : La relation d'équivalence est compatible avec la multiplication, la division, l'élévation à une puissance constante, mais pas avec l'addition et la composition en général.

Propriété 7. 1. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors f et g sont de même signe au voisinage de a.

2. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 4. Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de f

1. a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ en 0 b) $f(x)=(1+\tan(x))^{\frac{1}{x}}$ en 0

2. a) $f(x)=\dfrac{3x^2-x+7}{\sqrt{5x^4-2x+1}}$ en $-\infty$ b) $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$

2 Développements limités

Dans cette partie, f est définie sur un intervalle I, et $a\in\mathbb{R}$ est élément ou extrémité de I.

2.1 Développement limité en a

Définition 4. Soit $n\in\mathbb{N}$.

On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n en a, noté $\mathrm{DL}_n(a)$, s'il existe des réels $a_0,a_1,\dots,a_n$ tels que

$$f(x)\underset{x\to a}{=}a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right).$$

Dans ce cas, l'expression polynomiale $P_n(x-a)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n$ est la partie régulière du $DL_n(a)$ de f.

Remarque : Une fonction admet un DL en a à l'ordre 0 ssi elle est continue en a.
Une fonction admet un DL en a à l'ordre 1 ssi elle est dérivable en a.

Propriété 8. Si une fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ alors celui-ci est unique.

Application : $DL_n(0)$ (usuels) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1-x}\underset{x\to 0}{=}1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$

Exemple 5. $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$

Remarque : Le DL_n de f en a peut se ramener à celui de $h\to f(a+h)$ en 0.
$f(x)\underset{x\to a}{=}a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)$

$$\iff f(a+h)\underset{h\to 0}{=}a_0+a_1h+\cdots+a_nh^n+o(h^n).$$

Exemple 6. $DL_n(1)$ de $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$.

Propriété 9. Troncature Si $f(x)\underset{x\to a}{=}a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)$

alors $\forall p\in[\![0,n]\!],\ f(x)\underset{x\to a}{=}a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_p(x-a)^p+o\left((x-a)^p\right)$.

Propriété 10. Parité Soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$.
Si f est paire (resp. impaire) sur I alors la partie régulière de son $\mathrm{DL}_n(0)$ ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Théorème 1. Formule de Taylor-Young (admise)

Si $f \in \mathscr{C}^n(I)$ et $a \in I$ alors $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$.

Application : DL usuels en 0 $\quad \mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$$\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

2.2 Opérations sur les développements limités

Propriété 11. Combinaisons linéaires, produit Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ alors

1. $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\lambda P_n(x) + \mu Q_n(x)$.
2. fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière s'obtient en éliminant tous les termes de degré supérieur à n du produit $P_n(x)Q_n(x)$.

Exemple 7. $DL_3(0)$ de $\ f(x) = 4x^5 + x^3 - 1 + \dfrac{7}{1-x}\ $ et $\ g(x) = \mathrm{e}^x \cos(x)$.

Application : $DL_3(0)$ (usuel) $\quad \tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Propriété 12. Composition Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

et si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives $P_n(x)$ et $Q_n(x)$, alors

$g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière s'obtient en éliminant tous les termes de degré supérieur à n de $Q_n(P_n(x)) = Q_n \circ P_n(x)$.

Exemple 8. $DL_3(0)$ de $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$

Propriété 13. Primitivation Soit f continue sur I, tel que $0 \in I$.

Si f admet un $DL_n(0)$ alors toute primitive F de f admet un $DL_{n+1}(0)$.

Dans ce cas, si $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$, alors le $DL_{n+1}(0)$ de F s'écrit

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Application : $DL(0)$ (usuels) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

3 Applications des développements limités

3.1 Recherche d'équivalents et calculs de limites

Propriété 14. Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et admettant un $DL_n(0)$.

Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$ et $a_p \neq 0$ alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_px^p$.

Exemple 9. Déterminer la limite en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$

3.2 Position relative d'une courbe et de sa tangente

Méthode : Si f admet un développement limité en a qui s'écrit

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right) \text{ avec } a_p \neq 0,$$

alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en $(a, f(a))$ d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$ et la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de a s'obtient en étudiant le signe du terme $a_p(x-a)^p$.

Exemple 10. Étudier (localement) la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente en 0 si

a) $f = \exp$ b) $f = \cos$ c) $f = \sin$

Cas particulier : S'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right)$ avec $a_p \neq 0$,

- Si p est pair alors f admet un extremum local en a (max local si $a_p < 0$, min local si $a_p > 0$).
- Si p est impair alors f admet un point d'inflexion en a.

3.3 Recherche d'asymptotes (en $\pm\infty$)

Définition 5. Si $f(x)-(ax+b)$ tend vers 0 en $\pm\infty$, on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est **asymptote oblique** à la courbe C_f en $\pm\infty$ (respectivement).

Méthode : Si la fonction $t \mapsto tf\left(\frac{1}{t}\right)$ admet un développement limité en 0 qui s'écrit

$$tf\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0}{=} a_0 + a_1 t + a_p t^p + o(t^p) \text{ avec } a_p \neq 0,$$

alors on peut écrire $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} a_0 x + a_1 + \frac{a_p}{x^{p-1}} + o\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$.

Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = a_0 x + a_1$ en $\pm\infty$, et le signe de $\frac{a_p}{x^{p-1}}$ donne la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'asymptote au voisinage de $\pm\infty$.

Exemple 11. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (2+x)\mathrm{e}^{-1/x}$.

Déterminer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$, puis étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.

4 Comparaison de suites

Définition 6. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes telles que (v_n) ne s'annule plus à partir d'un certain rang.
- On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note $u_n = O(v_n)$.
- On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0.
On note $u_n = o(v_n)$.
- On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note $u_n \sim v_n$.

Tous les résultats établis pour les fonctions s'étendent au cas des suites.

Exemple 12. Déterminer un équivalent simple de la suite u_n définie par

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, n \geqslant 1$$

et en déduire sa limite.