Applications linéaires

Exercice 1 Dans chaque cas, montrer que f est linéaire, puis déterminer son noyau et son image :

1. a) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2x-3y+z \end{array} \right.$ b) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(0) \end{array} \right.$

2. a) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z) \end{array} \right.$ b) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$

Exercice 2 Soit l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(-\frac{1}{2}x+3y, -\frac{1}{2}x+2y\right) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Chercher les réels λ tels que l'équation $f(u) = \lambda u$ admette une solution non triviale.
3. (a) Montrer que $\mathcal{D}_1 = \left\{u \in \mathbb{R}^2 / \ f(u) = u\right\}$ est une droite vectorielle.
   (b) Montrer que $\mathcal{D}_2 = \left\{u \in \mathbb{R}^2 / \ f(u) = \frac{1}{2}u\right\}$ est une droite vectorielle.
4. Soient u_1 et u_2 des vecteurs non nuls respectivement de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire $f^n(u_1)$ et $f^n(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2.
   (b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression analytique de f^n.

Exercice 3 Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $\varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP$.

1. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Dans cette question $a = 5$ et $b = 1$. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Dans cette question $a = 3$ et $b = -3$. Déterminer le rang puis le noyau de φ.

Exercice 4 Soit E l'espace vectoriel engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_1(t) = \sin(2t)$, $f_2(t) = \cos(2t)$, $f_3(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)$ et $f_4(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos(2t)$.

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Pour $f \in E$, on pose $\psi(f) = f'' + 4f$.

   Montrer que ψ induit un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son rang.

Exercice 5 Soit Ψ l'application définie par $\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{ax+b}{(x+1)(x-2)}dx \end{cases}$

1. Démontrer que Ψ est linéaire.
2. On pose $u = (1,1)$ et $v = (1,-2)$. Démontrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\Psi(u)$ et $\Psi(v)$.
4. En déduire la valeur de $\Psi(a,b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.
2. Montrer que $\text{Im} f \cap \text{Ker} f = \{0_E\} \iff \text{Ker} f = \text{Ker} f^2$.
3. En déduire une CNS pour que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ soient supplémentaires dans E.

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie, et $(f,g) \in (\mathscr{L}(E))^2$ tel que $f \circ g = 0$.

1. Montrer que $\text{rg } f + \text{rg } g \leq \dim E$.
2. Déterminer une CNS sur $\text{Im } g$ et $\text{Ker } f$ pour que $\text{rg } f + \text{rg } g = \dim E$.

Exercice 8 Soit l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}, 0\right) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base et la dimension des espaces caractéristiques de f.

Exercice 9 Soit l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y,x,-z) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base et la dimension des espaces caractéristiques de f.

Exercice 10 Soit l'application φ définie sur $E = \mathbb{C}_n[X]$ par $\varphi(P) = \dfrac{1}{2}(P(X) + P(-X))$.

1. Montrer que φ est un projecteur de E. Déterminer ses espaces caractéristiques.
2. Montrer que $\text{Id}_E - \varphi$ est un projecteur de E. Déterminer ses espaces caractéristiques.
3. Montrer que $2\varphi - \text{Id}_E$ est une symétrie de E. Déterminer ses espaces caractéristiques.