Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E, F et G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1 Généralités sur les applications linéaires

1.1 Espaces d'applications linéaires

Définition 1. Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si

$$\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.

Remarque Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$.

Exemple 1. Dans chaque cas, déterminer si f est une application linéaire :

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, 3x, x-y) \end{array} \right.$
3. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array} \right.$

Cas particuliers (où $F = E$) : Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E. L'ensemble des endomorphismes de E est simplement noté $\mathscr{L}(E)$.

Si $k \in \mathbb{K}^*$, $\quad h_k : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & ku \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E, appelé **homothétie de rapport k**.

$h_1 = \mathrm{Id}_E : u \longmapsto u$ est un endomorphisme de E, appelé **identité de E**.

Propriété 1. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$ et

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in E^p, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \ f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(u_k).$$

Propriété 2. $(\mathscr{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2 Image et noyau d'une application linéaire

Définition 2. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **image** de f l'ensemble, noté Im f, défini par

$$\text{Im } f = f(E) = \{f(u),\ u \in E\} \subset F.$$

Propriété 3. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors 1. Im f est un sous espace vectoriel de F

2. f est surjective ssi Im $f = F$.

Exemple 2. Déterminer l'image des applications linéaires de l'exemple 1. Sont-elles surjectives ?

Définition 3. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **noyau** de f l'ensemble, noté Ker f, défini par

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E,\ f(u) = 0_F\} \subset E.$$

Propriété 4. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors 1. Ker f est un sous espace vectoriel de E

2. f est injective ssi Ker $f = \{0_E\}$.

Exemple 3. Déterminer le noyau des applications linéaires de l'exemple 1. Sont-elles injectives ?

1.3 Composées d'applications linéaires et isomorphismes

Propriété 5. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.

Cas particulier : si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors $f \circ f \in \mathscr{L}(E)$, $f \circ f \circ f \in \mathscr{L}(E)$ ... Ainsi, on peut définir les "puissances" de f par récurrence : $f^0 = \text{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f \circ f^k \in \mathscr{L}(E)$.

Exemple 4. Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $\Delta(P) = XP'$ et $\varphi(P) = X^2P'' + 5XP' + P$.

Montrer que $\varphi = \Delta^2 + 4\Delta + \text{Id}$. En déduire que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ et déterminer Kerφ.

Définition 4.

1. On appelle **isomorphisme** de E sur F toute application linéaire $f : E \to F$ bijective.

   On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E sur F.

2. On appelle **automorphisme** de E toute application linéaire $f : E \to E$ bijective.

   L'ensemble des automorphismes de E est noté GL (E), et appelé **groupe linéaire** de E.

Exemple 5. Soit $k \in \mathbb{K}^*$ et h_k l'homothétie de rapport k de E. Montrer que $h_k \in \mathrm{GL}\,(E)$.

Propriété 6. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. Si f est un isomorphisme alors sa réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.
2. Si f et g sont des isomorphismes alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G.

2 Applications linéaires en dimension finie

2.1 Définition d'une application linéaire par l'image d'une base

Théorème 1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

Si $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $f(e_j) = v_j$.
Elle est définie par $\forall u = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j \in E, \quad f(u) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j v_j \in F$.

Conséquence : Si $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, alors on a :

$$f = g \iff \forall j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = g(e_j).$$

Exemple 6. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Expliciter $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ si

$$f(e_1) = (8,3),\ f(e_2) = (-1,1) \text{ et } f(e_3) = (1,0).$$

Propriété 7. Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$,
si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1, F), u_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$ alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.

Théorème 2. Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors

1. $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_p))$
2. f est injective ssi $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est libre
3. f est surjective ssi $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est génératrice de F
4. f est un isomorphisme de E sur F ssi $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de F.

Remarque : Si f est injective (resp. surjective) alors $\dim E \leq \dim F$ (resp. $\dim E \geq \dim F$).

Exemple 7. Dans chaque cas, déterminer l'image de f et si f est injective, surjective, bijective :

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, 3x, x-y) \end{array} \right.$

2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array} \right.$

3. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ (a,b) & \longmapsto & aX+b \end{array} \right.$.

Corollaire 1. Soient E, F de dimension finie. E et F sont isomorphes ssi $\dim E = \dim F$.

Exemple 8. Soit $E = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}$, où $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$ est un isomorphisme. En déduire la dimension de E.

Corollaire 2. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $\dim E = \dim F$ alors

f est bijective ssi f est injective ssi f est surjective.

Cas particulier : Si E est de dimension finie alors

$f \in \mathscr{L}(E)$ est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective.

Exemple 9. Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array} \right.$ est un automorphisme.

2.2 Rang d'une application linéaire

Définition 5. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, où E est de dimension finie.

On appelle **rang** de f le nombre entier défini par $\text{rg } f = \dim(\text{Im} f)$.

Théorème 3. Théorème du rang Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et E est de dimension finie, alors

$$\dim E = \text{rg } f + \dim(\text{Ker} f)$$

Remarque : Dans ce cas, $\text{rg } f = \dim E - \dim(\text{Ker} f)$, et tout supplémentaire G de $\text{Ker } f$ dans E est isomorphe à $\text{Im} f$.

Exemple 10. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(2) \end{array} \right.$

Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})$, puis déterminer le rang et le noyau de f.

Propriété 8. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, où E, F sont de dimension finie alors

1. $\text{rg } f \leq \dim E$
2. si $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $\text{rg } (g \circ f) \leq \min\{\text{rg } f, \text{ rg } g\}$
3. si $g \in \mathscr{L}(F,G)$ est un isomorphisme alors $\text{rg } (g \circ f) = \text{rg } f$
4. si $g \in \mathscr{L}(G,E)$ est un isomorphisme alors $\text{rg } (f \circ g) = \text{rg} f$.

3 Projecteurs, symétries et équations linéaires

3.1 Projecteurs d'un espace vectoriel

Définition 6. Si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur u de E s'écrit de manière unique :

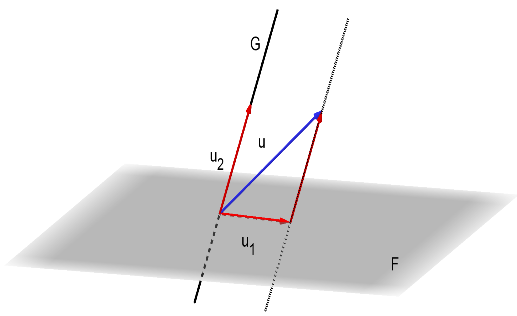
$$u = u_1 + u_2 \text{ avec } u_1 \in F \text{ et } u_2 \in G.$$

On appelle **projecteur** sur F parallèlement à G l'application $p : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_1 \end{array} \right.$

Remarque : Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors on a :

1. $\text{Im} f = F$ et $\forall u \in E,\ u \in F \iff p(u) = u$
2. $\forall u \in E,\ u \in G \iff p(u) = 0_E$
3. $\forall u \in E,\ (\text{Id}_E - p)(u) = u - p(u) = u_2$

et $\text{Id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F.



Exemple 11. Soient $u_1 = (2,0)$, $u_2 = (-1,1)$, $D_1 = \text{Vect } (u_1)$ et $D_2 = \text{Vect } (u_2)$.
Expliciter le projecteur p sur D_1 parallèlement à D_2.

Théorème 4. Caractérisation des projecteurs Soit une application $p : E \to E$.

1. p est un projecteur ssi $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$.
2. Dans ce cas, $E = \text{Im } p \oplus \text{ Ker } p$ et p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Exemple 12. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-y,y) \end{array} \right.$

Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$, et déterminer ses éléments caractéristiques.

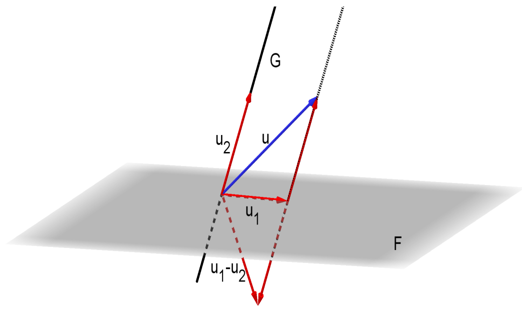
3.2 Symétries d'un espace vectoriel

Définition 7. Si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur u de E s'écrit de manière unique :

$$u = u_1 + u_2 \text{ avec } u_1 \in F \text{ et } u_2 \in G.$$

On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application $s : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_1 - u_2 \end{array} \right.$.

Remarque : Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors on a :



1. $\forall u \in E,\ u \in F \Longleftrightarrow s(u) = u \Longleftrightarrow s(u) - u = 0_E$
2. $\forall u \in E,\ u \in G \Longleftrightarrow s(u) = -u \Longleftrightarrow s(u) + u = 0_E$
3. $\forall u \in E,\ -s(u) = u_2 - u_1$, et $-s$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F
4. $\forall u \in E,\ \dfrac{1}{2}(s(u) + u) = u_1$, et $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ est le projecteur sur F parallèlement à G ssi $s = 2p - \mathrm{Id}$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exemple 13. Soient $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, -1)$, $D_1 = \text{Vect }(u_1)$ et $D_2 = \text{Vect }(u_2)$. Expliciter la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2.

Théorème 5. Caractérisation des symétries Soit une application $s : E \to E$.

1. s est une symétrie ssi $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
2. Dans ce cas, $E = \text{Ker }(\mathrm{Id}_E - s) \oplus \text{ Ker }(\mathrm{Id}_E + s)$ et s est la symétrie par rapport à $F = \text{Ker }(\mathrm{Id}_E - s)$ parallèlement à $G = \text{Ker }(\mathrm{Id}_E + s)$.

Remarque : Si $s : E \to E$ est une symétrie alors s est bijective et $s^{-1} = s$.

Exemple 14. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y, -z) \end{array} \right.$

Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{R}^3$, et déterminer ses éléments caractéristiques.

3.3 Équations linéaires

Théorème 6. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $b \in F$, et l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$.

1. Si $b \notin \text{Im } f$, l'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.
2. Si $b \in \text{Im } f$, il existe $x_p \in E$ tel que $f(x_p) = b$ et l'ensemble des solutions est
$$S = \{x_p + x_H,\ x_H \in \text{Ker} f\}.$$