Analyse asymptotique

1 Relations de comparaison : cas des fonctions

2 Développements limités

Dans cette partie, f est définie sur un intervalle I, et $a \in \mathbb{R}$ est élément ou extrémité de I.

2.1 Développement limité en a

Définition 1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n en a, noté $\mathrm{DL}_n(a)$, s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Dans ce cas, l'expression polynomiale $P_n(x-a) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$ est la partie régulière du $DL_n(a)$ de f.

Remarque : Une fonction admet un DL en a à l'ordre 0 ssi elle est continue en a.
Une fonction admet un DL en a à l'ordre 1 ssi elle est dérivable en a.

Propriété 1. Si une fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ alors celui-ci est unique.

Application : $DL_n(0)$ (usuels) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \dfrac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$

Exemple 1. $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$

Remarque : Le DL_n de f en a peut se ramener à celui de $h \to f(a+h)$ en 0.
$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$

$$\iff f(a+h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n).$$

Exemple 2. $DL_n(1)$ de $f(x) = \dfrac{3}{2x+1}$.

Propriété 2. Troncature Si $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$

alors $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\; f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right)$.

Démonstration $\forall p \in [\![0,n]\!], \forall k \in [\![1,n-p]\!], (x-a)^{p+k} \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^p\right)$
donc $a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^p\right)$

Propriété 3. Parité Soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$.
Si f est paire (resp. impaire) sur I alors la partie régulière de son $\mathrm{DL}_n(0)$ ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration Soit f une fonction paire admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$:
$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o\left(x^n\right)$
On a alors $f(x) = f(-x) \underset{x\to 0}{=} a_0 - a_1x + \cdots + (-1)^na_nx^n + o\left(x^n\right)$
Par unicité du $\mathrm{DL}_n(0), a_{2k+1} = -a_{2k+1}, \forall k$ tel que $1 \leqslant 2k+1 \leqslant n$
D'où $a_{2k+1} = 0 \forall k$ tel que $1 \leqslant 2k+1 \leqslant n$ et la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f ne contient que des puissances paires.

On démontre de même que si f est impaire, $a_{2k} = 0, \forall k$ tel que $0 \leqslant 2k \leqslant n$ et la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f ne contient que des puissances impaires.

Théorème 1. Formule de Taylor-Young (admise)
Si $f \in \mathscr{C}^n(I)$ et $a \in I$ alors $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$.

Remarque Pour la partie régulière, on reconnait la formule de Taylor en 0.

Application : DL usuels en 0 $\quad \mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

Démonstration La fonction exponentielle est c^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$, donc $f^{(n)}(0) = 1$ et le résultat découle immédiatement de la formule de Taylor-Young.

On a vu dans le dernier exercice du TD 17 que toute fonction de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Pour la fonction exponentielle, cette décomposition est $\mathrm{e}^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ d'où les $\mathrm{DL}_n(0)$ de ch et sh , en utilisant la propriété 3 :

$$\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

On peut admettre que la formule du $\mathrm{DL}_n(0)$ de la fonction exponentielle est encore valable en remplaçant x par $\mathrm{i}x$ pour retenir les $\mathrm{DL}_n(0)$ de cos et sin en prenant la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et en se souvenant que $(\mathrm{i})^{2n} = (-1)^n$ et $(\mathrm{i})^{2n+1} = (-1)^n\mathrm{i}$.
Bien entendu, comme la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire, la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\cos x$ ne contient que des puissances paires et celle de $\sin x$ ne contient que des puissances impaires.

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Démonstration On calcule les dérivées de $f(x) = (1+x)^\alpha$ qui est c^∞ sur $]-1,+\infty[$ par récurrence. $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$
Supposons que $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ à un rang $n \geqslant 1$,
on a alors $f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$ ce qui montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

On obtient donc $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ et la formule de Taylor-Young donne le résultat.

2.2 Opérations sur les développements limités

Propriété 4. Combinaisons linéaires, produit Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ alors

1. $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\lambda P_n(x) + \mu Q_n(x)$.
2. fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière s'obtient en éliminant tous les termes de degré supérieur à n du produit $P_n(x)Q_n(x)$.

Exemple 3. $DL_3(0)$ de $f(x) = 4x^5 + x^3 - 1 + \dfrac{7}{1-x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^x\cos(x)$.

Correction Le $DL_3(0)$ de $4x^5 + x^3 - 1$ est $-1 + x^3 + o(x^3)$ car c'est un polynôme et celui de $\dfrac{7}{1-x}$ est $7(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ donc le $DL_3(0)$ de f est

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 6 + 7x + 7x^2 + 8x^3 + o(x^3)}$$

$DL_3(0)$ de $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ et celui de $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ puisque le terme suivant est de degré 4.

En multipliant et en éliminant toutes les puissances de x supérieure à 3 on obtient le $DL_3(0)$ de g

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$$

Application : $DL_3(0)$ (usuel) $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$.

Démonstration $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \left(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\times\dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=}$
$\left(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$ en utilisant $\dfrac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1+u+o(u)$ et en posant $u=\dfrac{x^2}{2}\to 0$ lorsque $x\to 0$

On effectue ce produit en éliminant les puissances de x supérieures à 3 et on obtient $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$

Le $DL_3(0)$ de $\tan x$ est bien $\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}$

Propriété 5. Composition Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

et si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives $P_n(x)$ et $Q_n(x)$, alors

$g\circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière s'obtient en éliminant tous les termes de degré supérieur à n de $Q_n(P_n(x)) = Q_n\circ P_n(x)$.

Exemple 4. $DL_3(0)$ de $f(x)=\mathrm{e}^{\sin(x)}$ et $g(x)=\mathrm{e}^{\cos(x)}$

Correction $\sin x \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{6}+o(x^3)$

On pose $u=x-\dfrac{x^3}{6}$ et on calcule u^2 et u^3 en éliminant toutes les puissances supérieures à 3 :

$u^2=\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)^2 = x^2+o(x^3)$ $u^3=x^3+o(x^3)$ donc

$$\boxed{\mathrm{e}^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)}$$

$\mathrm{e}^{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}$. Or $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+o(u)$ donc

$$\boxed{\mathrm{e}^{\cos x} = \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}$$

Propriété 6. Primitivation Soit f continue sur I, tel que $0 \in I$.

Si f admet un $DL_n(0)$ alors toute primitive F de f admet un $DL_{n+1}(0)$.

Dans ce cas, si $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$, alors le $DL_{n+1}(0)$ de F s'écrit

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Application : $DL(0)$ (usuels) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

Une primitive de f est $F(x) = \ln(1+x)$ avec $F(0) = 0$.

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$

Une primitive de f est $F(x) = \arctan x$ avec $\arctan(0) = 0$.