Probabilités sur un univers fini

Exercice 1 20 livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces 20 livres, 3 sont d'un même auteur A, les autres étant d'auteurs différents.

Calculer la probabilité que les 3 livres de A se retrouvent côte à côte.

Exercice 2 On lance $n \geq 3$ balles vers trois paniers, chacun pouvant accueillir toutes les balles. Quelle est la probabilité de l'événement "aucun panier n'est vide" ?

Exercice 3 On a décelé dans une population, une probabilité $0,3$ pour qu'un individu soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un individu qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est $0,9$. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive à T est $0,8$.

Quelle est la probabilité qu'un individu ayant une réaction positive soit atteint par M ?

Exercice 4 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC direct et son cercle circonscrit Γ. Un individu placé initialement en A, se promène aléatoirement sur le cercle Γ de la façon suivante :

- quand il est en A, il va vers B avec la probabilité $0,75$ et vers C avec la probabilité $0,25$
- quand il est en B, il va vers A avec la probabilité $0,75$ et vers C avec la probabilité $0,25$
- quand il est en C, il va toujours vers B.

On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives que l'individu se retrouve en A, B et C à l'instant $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que M peut s'écrire sous la forme $M = PDP^{-1}$, avec
$$P = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & -0,75 \end{pmatrix}.$$
3. En déduire a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis calculer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Exercice 5 Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n boules en remettant la boule après tirage si elle est rouge, et en ne la remettant pas si elle est blanche.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un boule blanche en n tirages ?

Exercice 6 Un ascenseur en état de marche à l'instant initial $t = 0$ peut ensuite tomber en panne selon les conditions suivantes :

• si l'ascenseur est en état de marche à l'instant $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'il fonctionne encore à l'instant $n+1$ vaut $p \in [0, 1]$.

• si l'ascenseur est en panne à l'instant $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'il soit encore en panne à l'instant $n+1$ vaut $q \in [0, 1]$.

Déterminer la probabilité que l'ascenseur fonctionne à l'instant n, et la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 On considère n personnes qui se transmettent une information I. La première personne reçoit cette information, la transmet à la deuxième personne, ainsi de suite jusqu'à la *n-ième* personne qui l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, et le contraire avec la probabilité $1 - p$.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise.
2. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

Exercice 8 On dispose de 7 urnes $U_0, \ldots, U_6$. L'urne k contient k boules blanches et $6 - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on effectue 3 tirages avec remise dans l'urne choisie.
On note B_i l'événement "la i^{eme} boule tirée est blanche".

1. Déterminer la probabilité p_1 que le premier tirage ait amené une boule blanche.
2. Déterminer la probabilité p_2 que les deux premiers tirages aient amené des boules blanches.
3. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
4. Déterminer la probabilité que la $3^{ième}$ boule soit blanche sachant que les deux premières le sont.
5. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit U_6 sachant que les 3 boules sont blanches ?

Exercice 9 Soit n un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "face" est p avec $p \in]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Quelle est la probabilité p_n qu'au cours de ces n lancers, "face" ne soit jamais suivi de "pile" ?
2. Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini.