Correction du devoir maison n° 18

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{1-\cos(2x)}$.

1. $\cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   $\boxed{f \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.}$
   f est paire et 2π périodique. une étude sur $]0,\pi[$ est alors suffisante.

2. f est continue sur $]0,\pi[$ comme quotient de fonctions qui le sont avec un dénominateur non nul.
   $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et $1-\cos(2x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{4x^2}{2} = 2x^2$
   Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{4}$ et $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } \tilde{f}(0) = \dfrac{1}{4}}$
   On pose $x = \pi + h$, $1-\cos x = 1+\cos h \underset{h\to 0}{=} 2 - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)$
   $1-\cos(2x) = 1-\cos(2h) \underset{h\to 0}{\sim} 2h^2$
   Donc $f(x) \underset{x\to\pi}{\sim} \dfrac{2}{2(x-\pi)^2} \underset{x\to\pi}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } \pi}$

3. $1-\cos x \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$ et $1-\cos(2x) \underset{x\to 0}{=} 2x^2 - \dfrac{2^4x^4}{4!} + o(x^4) = 2x^2 - \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)$

   $\dfrac{1-\cos x}{1-\cos(2x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{24} + o(x^2)}{2\left(1-\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)\right)}$ en simplifiant par x^2

   Or $\dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$
   D'où $f(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{x^2}{12}+o(x^2)\right)\left(1+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{x^2}{4}\right) + o(x^2)$
   Le prolongement par continuité de f est donc dérivable en 0 et $\boxed{\tilde{f}'(0) = 0}$
   L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en 0 est $y = \dfrac{1}{4}$
   $\boxed{\text{La courbe représentative de } f \text{ est au dessus de sa tangente}}$ localement au point d'abscisse 0 car $f(x) - \dfrac{1}{4} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{16} + o(x^2) \geqslant 0$ au voisinage de 0.

Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$).

   La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$).

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ comme produit de fonctions qui le sont, et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{(x-1)^2} \times \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{x-1} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x^3-2x^2-1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}, \end{aligned}$$

qui est du signe de $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ car $(x-1)^2\sqrt{x^2+1} > 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme), et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$.
Comme $\varphi(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x^3$, on obtient le tableau de variation de φ :

$$\begin{array}{|c|ccccccc|} \hline x & -\infty & & 0 & & \frac{4}{3} & & +\infty \\ \hline \varphi'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline \varphi(x) & & & -1 & & & & +\infty \\ & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ & -\infty & & & & -\frac{59}{27} & & \\ \hline \end{array}$$

D'après ce tableau de variation, $\varphi < 0$ sur l'intervalle $]-\infty, \frac{4}{3}[$. De plus, φ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[\frac{4}{3}, +\infty[$ donc, d'après le théorème de la bijection monotone, φ réalise une bijection de $[\frac{4}{3}, +\infty[$ sur l'intervalle $\varphi([\frac{4}{3}, +\infty[) = [-\frac{59}{27}, +\infty[$ qui contient 0. L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on note α, et qui vérifie $2,2 < \alpha < 2,3$ car $\varphi(2,2) < 0 < \varphi(2,3)$.
De ce qui précède, on déduit le tableau de variation de f :

$$\begin{array}{|c|ccccccc|} \hline x & -\infty & & 1 & & \alpha & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & || & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & +\infty & & || \; +\infty & & & & +\infty \\ & & \searrow & || & \searrow & & \nearrow & \\ & & -\infty & || & & f(\alpha) & & \\ \hline \end{array}$$

En effet, $\dfrac{x}{x-1} \underset{\pm\infty}{\sim} 1$ donc $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \sqrt{x^2+1} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

De plus, $x\sqrt{x^2+1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \sqrt{2} > 0$ donc $f(x) \underset{x\to 1^\pm}{\longrightarrow} \pm\infty$, par opérations sur les limites.

D'après son tableau de variation, la fonction f admet un unique extremum local qui est un minimum local atteint pour $x = \alpha$.

2. Comme $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a : $\quad \sqrt{x^2+1} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

De plus, $\quad \dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2) \quad$ donc $\quad \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{-x}{1-x} \underset{x\to 0}{=} -x - x^2 + o(x^2)$.

Par produit de développements limités on obtient : $f(x) \underset{x\to 0}{=} -x - x^2 + o(x^2)$.

On en déduit que la courbe
$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une tangente } \mathcal{T}_0 \text{ au point } (0,0)\text{, d'équation } y = -x}$.

De plus $f(x) - (-x) \underset{x\to 0}{=} -x^2 + o(x^2) \leq 0$ au voisinage de 0.

Donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } \mathcal{T}_0 \text{ au voisinage de } 0}$.

3. Si $x \to +\infty$, alors $t = \dfrac{1}{x} \to 0^+$ et $tf\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t}-1} = \dfrac{t}{\sqrt{t^2}} \times \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{1-t} \underset{t>0}{=} \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{1-t}$.

   Donc $tf\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to 0^+}{=} \left(1 + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\left(1 + t + t^2 + o(t^2)\right) \underset{t\to 0^+}{=} 1 + t + \dfrac{3t^2}{2} + o(t^2)$.

   Donc $f(x) \underset{x\to +\infty}{=} x + 1 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   On en déduit que la courbe $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote } \mathcal{D} \text{ en } +\infty\text{, d'équation } y = x+1}$.

   De plus $f(x) - (x+1) \underset{x\to +\infty}{=} \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ au voisinage de $+\infty$.

   Donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{D} \text{ au voisinage de } +\infty}$.

4. Si $x \to -\infty$, alors $t = \dfrac{1}{x} \to 0^-$ et $tf\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t}-1} = \dfrac{t}{\sqrt{t^2}} \times \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{1-t} \underset{t<0}{=} -\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{1-t}$.

   Donc $tf\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to 0^-}{=} -\left(1 + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\left(1 + t + t^2 + o(t^2)\right) \underset{t\to 0^-}{=} -1 - t - \dfrac{3t^2}{2} + o(t^2)$.

   Donc $f(x) \underset{x\to -\infty}{=} -x - 1 - \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   On en déduit que la courbe
   $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote } \Delta \text{ en } -\infty\text{, d'équation } y = -x-1}$.

   De plus $f(x) - (-x-1) \underset{x\to -\infty}{=} -\dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ au voisinage de $-\infty$.

   Donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \Delta \text{ au voisinage de } -\infty}$.