Correction du devoir maison n° 17

Exercice 1

1. Si on dispose d'un dé rouge, d'un vert et d'un bleu, à l'issue d'un lancer des trois dés, on peut noter le résultat du rouge, puis celui du vert et enfin celui du bleu. Ainsi, un tirage peut-être assimilé à une $3-$liste d'éléments de $[\![1,6]\!]$.

   Donc $\boxed{\text{le nombre total de tirages est } 6^3 = 216}$.

2. Un tirage sans 6 est une trois liste d'éléments de $[\![1,5]\!]$. Il y en a $5^3 = 125$.

   Par complémentaire,
   $\boxed{\text{le nombre de tirages contenant au moins un six est } 216 - 125 = 91}$.

3. Un tirage avec exactement trois numéros différents est une $3-$liste sans répétition d'éléments de $[\![1,6]\!]$.

   Donc $\boxed{\text{le nombre de tirages avec exactement trois numéros différents est } \frac{6!}{(6-3)!} = 120}$.

4. L'ensemble des tirages ayant au moins deux numéros identiques est le complémentaire de l'ensemble des tirages avec exactement trois numéros différents.

   Donc $\boxed{\text{le nombre de tirages avec au moins deux numéros identiques est } 216 - 120 = 96}$.

5. Obtenir un tirage dont la somme des trois numéros tirés soit paire, c'est :

   — obtenir un tirage avec trois numéros pairs : il y a $3^3 = 27$ possibilités ;

   — ou obtenir deux numéros impairs et un numéros pairs, ce dernier pouvant être le premier, le deuxième ou le troisième : il y a $3^2 \times 3 \times 3 = 81$ possibilités.

   L'union étant disjointe,

   $\boxed{\text{le nombre de tirages tels que la somme des numéros tirés soit paire est } 27 + 81 = 108}$.

Exercice 2

1. On effectue p tirages successifs avec remise.
   (a) Le nombre total de résultats possibles est $\boxed{(3n)^p}$.
   (b) Le nombre de résultats pour lesquels on n'a jamais pioché deux fois de suite deux boules de même couleur est $\boxed{3n(2n)^{p-1}}$, car on a $3n$ choix pour la 1ère boule, puis $2n$ choix pour chacune des suivantes.
2. On effectue p tirages successifs sans remise.

(a) Le nombre total de résultats possibles est
$(3n) \times (3n-1) \times \cdots \times (3n-p+1) = \dfrac{(3n)!}{(3n-p)!}$.

(b) Soit $k \in [\![0, p]\!]$.

Le nombre de résultats donnant exactement k boules rouges est $\boxed{\binom{n}{k}\binom{2n}{p-k}p!}$

Car on commence par choisir les k boules rouges tirées, $\binom{n}{k}$ choix, puis les $p-k$ boules non rouges, $\binom{2n}{p-k}$ choix, et enfin l'ordre des p boules tirées au total , $p!$ possibilités.

(c) Le nombre de résultats pour lesquels on a pioché au moins une fois une boule rouge est égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\binom{n}{k}\binom{2n}{p-k}p!$

Il est aussi égal au nombre total de tirages possibles duquel on retranche le nombre de tirages possibles sans aucune boule rouge, c'est-à-dire : $\dfrac{(3n)!}{(3n-p)!} - \dfrac{(2n)!}{(2n-p)!}$.

En égalant les deux expressions et en divisant par $p!$ on obtient la formule demandée.