Correction du Test n° 19

Sujet A

1.

2. On dispose de 5 jetons numérotés de 1 à 5, que l'on doit ranger dans 5 casiers numérotés de 1 à 5, chaque casier pouvant contenir de 0 à 5 jetons. Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre de rangements vérifiant les conditions indiquées.

   (a) Choisir un rangement tel que le casier numéro 5 soit vide, revient à choisir, pour chaque jeton, un casier parmi les quatre numérotés de 1 à 4.

   $\boxed{\text{Le nombre de ces rangements est donc } 4^5 = 1024}$.

   (b) Choisir un rangement tel que un casier contienne 3 jetons et un autre 2 jetons, revient à choisir un casier parmi les cinq casiers et trois jetons parmi les cinq jetons pour les mettre dans ce casier, puis à choisir un casier parmi les quatre restants et mettre les deux jetons restants dans ce dernier.

   $\boxed{\text{Le nombre de ces rangements est donc } 5 \times \binom{5}{3} \times 4 = 5 \times 10 \times 4 = 200}$.

3. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

   $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o(x^3)$.

   Par produit de développements limités, $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^3}{6} + o(x^3)}$.

   On en déduit que $\boxed{\text{la tangente à } \mathscr{C}_f \text{ en 0 est la droite } T_0 \text{ d'équation } y = 1 + x}$.

   De plus, $f(x) - (1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \leq 0$ et $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } T_0 \text{ au voisinage de 0}}$.

Correction du Test n° 19

Sujet B

1.

2. On dispose de 5 jetons numérotés de 1 à 5, que l'on doit ranger dans 5 casiers numérotés de 1 à 5, chaque casier pouvant contenir de 0 à 5 jetons. Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre de rangements vérifiant les conditions indiquées.

(a) Choisir un rangement tel que le jeton numéro 1 soit dans le casier numéro 1, revient à mettre ce jeton dans le casier numéro 1 puis à choisir, pour chacun des jetons numérotés de 2 à 4, un casier parmi les cinq casiers.

$\boxed{\text{Le nombre de ces rangements est donc } 1 \times 5^4 = 625}$.

(b) Choisir un rangement tel que deux casiers exactement soient occupés, revient à choisir deux casiers parmi les cinq puis à ranger les cinq jetons dans ces deux casiers, sans qu'aucun ne soit vide.

$\boxed{\text{Le nombre de ces rangements est donc } \binom{5}{2} \times (2^5 - 2) = 10 \times 30 = 300}$.

3. $f(x) = \dfrac{x}{1 + \mathrm{e}^x}$

$\mathrm{e}^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$, donc $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{x}{2 + x + o(x)} \underset{0}{=} \dfrac{x}{2} \times \dfrac{1}{1 + \frac{x}{2} + o(x)}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{2} + o(x)\right) = 0$, et $\dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + o(u)$.

Donc, par composition, $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \dfrac{x}{2} \times \left(1 - \dfrac{x}{2} + o(x)\right) \underset{0}{=} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)}$.

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet pour tangente en 0 la droite $\boxed{\mathcal{T}_0 : \ y = \dfrac{x}{2}}$.

De plus, $f(x) - \dfrac{x}{2} \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{4} + o(x^2) \leq 0$, au voisinage de 0.

Donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ se situe au dessous de sa tangente } \mathcal{T}_0 \text{ au voisinage de } 0}$.