Correction du devoir maison n° 19

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2x-3y+z \end{array} \right.$;

Correction : Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned} f(u+\lambda v) &= f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') \\ &= 2(x+\lambda x')-3(y+\lambda y')+z+\lambda z' \\ &= 2x-3y+z+\lambda(2x'-3y'+z') \\ &= f(u)+\lambda f(v). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})}$. De plus, on a

$$u\in\mathrm{Ker}(f) \iff f(u)=2x-3y+z=0 \iff z=-2x+3y \iff u=x\underbrace{(1,0,-2)}_{=u_1}+y\underbrace{(0,1,3)}_{=u_2}.$$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)}$. Comme u_1,u_2 ne sont pas colinéaires ($\frac{0}{1}\neq\frac{-2}{3}$),

$\boxed{\mathscr{B}_1=(u_1,u_2) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(f))=2}$.

$\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}$ non nul car $f(1,0,0)=2\neq 0$. Donc
$1\leq\dim(\mathrm{Im}(f))\leq\dim(\mathbb{R})=1$.

On en déduit que $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f))=1 \text{ et } \mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}}$. f est surjective, mais pas injective.

2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(0) \end{array} \right.$;

Correction : Soient $\varphi,\psi\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors on a

$$f(\varphi+\lambda\psi)=(\varphi+\lambda\psi)(0)=\varphi(0)+\lambda\psi(0)=f(\varphi)+\lambda f(\psi).$$

Donc $\boxed{f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^\mathbb{R},\mathbb{R})}$. De plus, $\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\{\ \varphi\in\mathbb{R}^\mathbb{R}\mid\varphi(0)=0\ \}}$.

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction polynomiale $\varphi_k : x\mapsto x^k$ qui vérifie $\varphi_k(0)=0$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une famille libre de fonctions de $\mathrm{Ker}(f)$.

Donc, d'après le lemme fondamental, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ est de dimension infinie}}$.

$\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}$ non nul car $f(\varphi)=1\neq 0$ si $\varphi : x\mapsto x+1$.

Donc $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f))=1 \text{ et } \mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}}$. f est surjective, mais pas injective.

3. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y,y-z) \end{array} \right.$;

Correction : Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned} f(u+\lambda v) &= f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') \\ &= ((x+\lambda x')-(y+\lambda y'), (y+\lambda y')-(z+\lambda z')) \\ &= (x-y, y-z)+\lambda(x'-y', y'-z') \\ &= f(u)+\lambda f(v). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)}$. De plus, on a

$$u\in\mathrm{Ker}(f)\iff f(u)=(x-y,y-z)=(0,0)\iff x=y=z\iff u=x\underbrace{(1,1,1)}_{=u_1\neq(0,0)}.$$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(u_1),\ \mathscr{B}_1=(u_1) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(f))=1}$. De plus,

$$v=f(u)\iff v=(x-y,y-z)=x\underbrace{(1,0)}_{=v_1}+y\underbrace{(-1,1)}_{=v_2}+z\underbrace{(0,-1)}_{=v_3}.$$

Donc $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$. $v_2=-v_1-v_3$ et v_1,v_3 ne sont pas colinéaires,

donc $\dim(\mathrm{Im}(f))=\mathrm{rg}(v_1,v_2,v_3)=2=\dim(\mathbb{R}^2)$ et $\boxed{\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2}$. f est surjective, pas injective.

4. $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'\end{array}\right.$.

Correction : $\boxed{f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X],\mathbb{R}[X])}$, par linéarité de la dérivation. De plus, si $P\in\mathbb{R}_3[X]$,

$$P\in\mathrm{Ker}(f)\iff P'=0\iff P=\lambda\times 1,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(1) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(f))=1}$.

Si $P\in\mathbb{R}_3[X]$ alors $\deg(f(P))=\deg(P')\leq 2$. Donc $\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus,

$$1=f(X)\in\mathrm{Im}(f),\ X=f\left(\frac{1}{2}X^2\right)\in\mathrm{Im}(f) \text{ et } X^2=f\left(\frac{1}{3}X^3\right)\in\mathrm{Im}(f).$$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}_2[X]}$, par double inclusion. f n'est ni surjective, ni injective.