Devoir maison n° 20

A rendre le jeudi 18 avril 2024

Soit un entier $n \geq 3$, et le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application Δ définie sur E par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

On pose $P_0 = 1$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X - j)$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E.
2. Calculer $\Delta(P_k)$ pour $k \in [\![0, 2]\!]$.
3. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\Delta(P_k) = kP_{k-1}$.
4. Montrer que Δ est un endomorphisme de E, puis donner sa matrice dans la base $\mathscr{B}$.
5. Déterminer le rang puis le noyau de Δ.
6. On souhaite résoudre dans E l'équation linéaire $(\star) : \Delta(P) = X^2$.
   (a) Montrer que si Q_1 et Q_2 sont solutions de $(\star)$ alors $Q_1 - Q_2$ est constant.
   (b) Calculer $P_1 + P_2$. En déduire l'ensemble des solutions de $(\star)$.
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\star)$ qui vérifient $P(0) = 0$.