Correction du Test n° 20

Sujet A

1.
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z, 5x-2y+z) \end{array} \right.$

   (a) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{array}{rcl} f(u+\lambda v) & = & f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') \\ & = & (x+\lambda x'+z+\lambda z', 5((x+\lambda x')-2(y+\lambda y')+z+\lambda z') \\ & = & (x+z, 5x-2y+z)+\lambda(x+z', 5x'-2y'+z') \\ & = & f(u)+\lambda f(v). \end{array}$$

   Donc $\boxed{f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)}$.

   (b) $u\in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u)=(x+z,5x-2y+z)=(0,0)\Leftrightarrow x=-z$ et $4x-2y=0\Leftrightarrow z=-x$ et $y=\dfrac{x}{2}$.
   Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(2,1,-2)}$. et $\dim(\mathrm{Ker}(f))=1$.
   D'après le théorème du rang, $\dim\mathbb{R}^3=\mathrm{rg} f+\dim\mathrm{Ker}\, f$ donc $\mathrm{rg}\, f=2$ et $\mathrm{Im}\, f$ étant un sev de $\mathbb{R}^2$, $\boxed{\mathrm{Im}\, f=\mathbb{R}^2}$

   (c) f n'est pas injective car $\mathrm{Ker}\, f\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (ou car $\dim\mathbb{R}^3>\dim\mathbb{R}^2$) et f n'est alors pas bijective.
   f est surjective car $\mathrm{Im}\, f=\mathbb{R}^2$.

Correction du Test n° 20

Sujet B

1.
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, 2x+y, y) \end{array} \right.$

   (a) Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $v=(x',y')\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{array}{rcl} f(u+\lambda v) & = & f(x+\lambda x', y+\lambda y') \\ & = & ((x+\lambda x'), 2(x+\lambda x')+(y+\lambda y'), (y+\lambda y')) \\ & = & (x, 2x+y, y)+\lambda(x', 2x'+y', y') \\ & = & f(u)+\lambda f(v). \end{array}$$

   Donc $\boxed{f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)}$.

(b) $u \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(u) = (x, 2x+y, y) = (0,0,0) \iff x = y = 0$ donc
$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}}$
$v = f(u) \iff v = (x, 2x+y, y) = x\underbrace{(1,2,0)}_{=u_1} + y\underbrace{(0,1,1)}_{=u_2}$.
Donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)}$ et u_1, u_2 ne sont pas colinéaires, donc (u_1, u_2) est une base de Im f et rg $f = 2$.

(c) f est injective car $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
f n'est pas surjective car Im $f \neq \mathbb{R}^3$ (ou car dim $\mathbb{R}^2 <$ dim $\mathbb{R}^3$), et n'est donc pas non plus bijective.