

Devoir maison n° 21

A rendre le mardi 7 mai 2024

Exercice 1 On considère n personnes qui se transmettent une information I. La première personne reçoit cette information, la transmet à la deuxième personne, ainsi de suite jusqu'à la n -ième personne qui l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p ($0 < p < 1$), et le contraire avec la probabilité $1 - p$.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise.
2. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

Exercice 2 On identifie \mathbb{R}^3 à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en identifiant $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ à $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On considère alors la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et l'application $p : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ X & \longmapsto & AX \end{cases}$

associée.

1. (cours) Démontrer que p est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Calculer A^2 . En déduire que p est un projecteur de \mathbb{R}^3 .

On notera F et G les sous espaces de \mathbb{R}^3 tels que p est le projecteur sur F parallèlement à G .

3. Déterminer F et G (bases et dimensions).
4. Trouver une matrice B telle que $s : X \mapsto BX$ soit la symétrie de \mathbb{R}^3 par rapport à F parallèlement à G .

On explicitera les coefficients de B

Exercice 3 Soit $f : x \mapsto \frac{ex}{1+x^2}$.

Il est clair que la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Nous noterons \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour \mathcal{C}_f ?
2. Déterminer les limites de f et de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

La courbe \mathcal{C}_f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$?

3. Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

4. Expliciter le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.

En déduire l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f en 0 et la position relative de \mathcal{C}_f et de cette tangente.

5. Expliciter le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 1.

En déduire l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f en 1 et la position relative de \mathcal{C}_f et de cette tangente.

6. Tracer la courbe \mathcal{C}_f en faisant bien apparaître tous les résultats précédents.

7. Soit F la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0.

Expliciter le développement limité à l'ordre 4 de F au voisinage de 0.