Correction du devoir maison n° 20

Soit un entier $n \geq 3$, et le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application Δ définie sur E par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

On pose $P_0 = 1$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X - j)$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E.

   Correction $\deg(P_0) = 0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\deg(P_k) = k \leq n$ (produit de k facteurs de degré 1).

   Donc $\mathscr{B} = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de polynômes de E, non nuls et de degrés échelonnés.

   Donc $\mathscr{B} = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de E de rang $n + 1 = \dim(E)$.

   Donc $\boxed{\mathscr{B} = (P_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } E.}$

2. Calculer $\Delta(P_k)$ pour $k \in [\![0, 2]\!]$.

   Correction : $P_0(X) = 1$ donc $P_0(X+1) = 1$ et $\boxed{\Delta(P_0) = 0}$.

   $P_1(X) = X$ donc $P_1(X+1) = X + 1$ et $\boxed{\Delta(P_1) = 1}$.

   $P_2(X) = X(X-1) = X^2 - X$ donc $P_2(X+1) = (X+1)X = X^2 + X$ et $\boxed{\Delta(P_2) = 2X}$.

3. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\Delta(P_k) = kP_{k-1}$.

   Correction :
   $$P_k(X+1) = \prod_{j=0}^{k-1}(X + 1 - j) = (X+1)\prod_{j=1}^{k-1}(X - (j-1)) \underset{i=j-1}{=} (X+1)\prod_{i=0}^{k-2}(X - i).$$

   De plus $P_k(X) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X - j) = (X - (k-1))\prod_{j=0}^{k-2}(X - j) = (X - (k-1))P_{k-1}(X)$.

   Donc $\Delta(P_k) = (X+1)P_{k-1}(X) - (X - (k-1))P_{k-1}(X) = kP_{k-1}(X)$.

   Donc $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ \Delta(P_k) = kP_{k-1}}$.

4. Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

Correction : Si $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$ et
$\Delta(P) = P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$, qui est stable par combinaison linéaire. Donc Δ est bien définie sur E et à valeurs dans E.

Soient $P, Q \in E$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \Delta(P+\mu Q) &= (P+\mu Q)(X+1) - (P+\mu Q)(X) \\ &= P(X+1) + \mu Q(X+1) - P(X) - \mu Q(X) \\ &= [P(X+1) - P(X)] + \mu\, [Q(X+1) - Q(X)] \\ &= \Delta(P) + \mu \Delta(Q). \end{aligned}$$

Donc Δ est linéaire, donc $\boxed{\Delta \in \mathscr{L}(E)}$.

5. Déterminer le rang puis le noyau de Δ.

Correction : D'après la question 1., $\mathscr{B}$ est une base de E donc

$$\mathrm{Im}(\Delta) = \mathrm{Vect}(\Delta(P_0), \Delta(P_1), \Delta(P_2), \ldots, \Delta(P_n)).$$

D'après la question3., on a
$\mathrm{Im}(\Delta) = \mathrm{Vect}(0, 1P_0, 2P_1, \ldots, nP_{n-1}) = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$.

Donc $\boxed{\mathrm{rg}(\Delta) = \mathrm{rg}(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}) = n}$, car $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ est libre d'après 1..

Comme $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\mathrm{Im}(\Delta)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui a même dimension que $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Par le théorème du rang, on a : $\dim \mathrm{Ker}\ (\Delta)) = \dim(E) -\ \mathrm{rg}(\Delta) = n+1-n = 1$.

$\Delta(P_0) = 0$ donc $P_0 \in \mathrm{Ker}\ (\Delta)$. $P_0 = 1 \neq 0$, donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Vect}\ (1) = \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}}$.

6. On souhaite résoudre dans E l'équation linéaire $(\star)$: $\Delta(P) = X^2$.

   (a) Montrer que si Q_1 et Q_2 sont solutions de $(\star)$ alors $Q_1 - Q_2$ est constant.

   Correction : Si Q_1 et Q_2 sont solutions de $(\star)$ alors on a $\Delta(Q_1) = \Delta(Q_2) = X^2$. De plus,

   $\Delta(Q_1) = \Delta(Q_2) \Longleftrightarrow \Delta(Q_1) - \Delta(Q_2) = 0 \underset{\text{linéarité}}{\Longleftrightarrow} \Delta(Q_1 - Q_2) = 0 \Longleftrightarrow Q_1 - Q_2 \in$ $\mathrm{Ker}\ (\Delta)$.

   $\mathrm{Ker}\ (\Delta) = \mathrm{Vect}\ (1)$, donc
   $\boxed{\text{si } Q_1 \text{ et } Q_2 \text{ sont solutions de } (\star) \text{ alors } Q_1 - Q_2 \text{ est constant}}$.

   (b) Calculer $P_1 + P_2$. En déduire l'ensemble des solutions de $(\star)$.

Correction : $P_1 + P_2 = X + X^2 - X = X^2$. De plus, $\Delta(P_2) = 2P_1$ et $\Delta(P_3) = 3P_2$ donc

$$\Delta\left(\frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3\right) \underset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{2}\Delta(P_2) + \frac{1}{3}\Delta(P_3) = P_1 + P_2 = X^2.$$

Donc $\frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3$ est un solution particulière l'équation $\Delta(P) = X^2$.

Donc l'ensemble de ses solutions est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3 + P,\ P \in \mathrm{Ker}(\Delta)\right\} = \left\{\frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3 + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}}.$$

(c) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\star)$ qui vérifient $P(0) = 0$.

Correction : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{1}{2}P_2(0) + \frac{1}{3}P_3(0) + \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, \text{ car } P_2(0) = P_3(0) = 0.$$

Donc $\boxed{\text{l'unique solution de l'équation } (\star) \text{ vérifiant } P(0) = 0 \text{ est } \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3}$.